



سؤالات زیر مربوط به دسته‌بندی اعداد طبیعی است. توی این سوالات باید جمله اول هر دسته، جمله آخر هر دسته و تعداد جملات هر دسته را پیدا کنی. راستی طرح‌های کنکور علاوه زیادی به این تیب سوالات دارند!

تیب ۱۳۴ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

- ۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

تیب ۱۳۵ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$ در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهل، کدام است؟

- ۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

تیب ۱۳۶ اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله هر دسته مربع کامل باشد، $\dots, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \{2, 3, 4\}, \{1\}$ مجموع جملات دسته دهم کدام است؟

- ۱) ۱۷۳۰ ۲) ۱۷۲۹ ۳) ۱۸۳۰ ۴) ۱۸۲۹

تیب ۱۳۷ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که اولین عدد هر گروه مربع کامل باشد یعنی $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \dots$ میانگین پنج عدد آخر در دسته دهم کدام است؟

- ۱) ۱۱۹ ۲) ۱۱۸ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۲

تیب ۱۳۸ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دسته اول و دوم) برابر بزرگ‌ترین عضو دسته قبل است؛ یعنی $\dots, \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \{3, 5, 6\}, \{2, 3\}, \{1\}$. میانگین عضوهای دسته سیزدهم، کدام است؟

- ۱) $6144/5$ ۲) $2304/5$ ۳) $3072/5$ ۴) $2608/5$

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس ۳

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول)، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، دنباله حسابی نامیده می‌شود. به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گوییم و معمولاً آن را با d نمایش می‌دهیم!

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$$

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

مثلاً دنباله زیر، یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۳ است:

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$

جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots$$

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

ملاحظات قدرنسبت در دنباله حسابی

- ۱) اگر $d > 0$ باشد، دنباله صعودی است.
- ۲) اگر $d = 0$ باشد، دنباله ثابت است.
- ۳) اگر $d < 0$ باشد، دنباله نزولی است.

تذکر اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله‌ای حسابی باشند، آنگاه قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

مثال در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر ۲۲ و جمله سیزدهم برابر ۳۷ است. قدرنسبت را به دست آورید.

$$d = \frac{t_{13} - t_8}{13 - 8} = \frac{37 - 22}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

تست در یک دنباله حسابی جملات چهارم و هشتم به ترتیب ۶ و ۱۰ است. مجموع جملات دوم و هفتم چند برابر قدرنسبت است؟

- ۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

$$d = \frac{t_8 - t_4}{8 - 4} = \frac{10 - 6}{4} = 1$$

حال چون جمله چهارم برابر ۶ است، پس:

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow t_1 + 3 = 6 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{t_7 + t_2}{d} = \frac{t_1 + 6d + t_1 + d}{d} = \frac{2t_1 + 7d}{d} = \frac{2 \times 3 + 7 \times 1}{1} = 13$$

بدون پیدا کردن t_1 نیز می‌توانستیم جملات دوم و هفتم را به دست آوریم. چون $t_4 = 6$ است، پس:

$$t_7 = t_4 - 2d \Rightarrow t_7 = 6 - 2 = 4, \quad t_2 = t_4 + 2d \Rightarrow t_2 = 6 + 2 = 9$$

برای حل مسائل دنباله حسابی، به نکات زیر توجه کنید:

۱) وقتی دو جمله از دنباله حسابی را داشته باشیم، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی یعنی $t_n = t_1 + (n-1)d$ ، دو جمله داده شده را بر حسب t_1 و d بنویسیم و با حل دستگاه حاصل، مقدار t_1 و d را پیدا کنیم. مثلاً، در دنباله حسابی که جمله پنجم آن برابر ۹ و جمله یازدهم آن برابر ۲۷ است، داریم:

$$\begin{cases} t_5 = 9 \\ t_{11} = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 9 \\ t_1 + 10d = 27 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow t_1 = -3$$



درس سوم | دنباله‌های حسابی و هندسی

تست اعداد $1-5p, 3p+4, 2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله

حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

۳ شرط تشکیل دنباله حسابی را می‌نویسیم و داریم:

$$3p + 4 = \frac{(5p - 1) + (2p + 3)}{2} \Rightarrow 2p + 4 = \frac{7p - 1}{2}$$

$$\rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

پس جملات این دنباله به صورت ۱۵، ۲۲، ۲۹ هستند، بنابراین قدرنسبت آن برابر است با:

$$d = 22 - 15 = 7$$

قانون اندیس‌ها

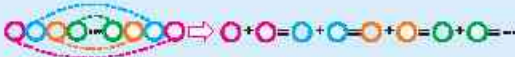
اگر اعداد طبیعی m, n, p, q شماره جملاتی از دنباله حسابی باشند، به طوری که $m + n = p + q$ باشد، آنگاه طبق قانون اندیس‌ها رابطه زیر بین جملات این دنباله برقرار است:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

مثلاً، چون $3 + 7 = 4 + 6$ است، پس در هر دنباله حسابی $t_3 + t_7 = t_4 + t_6$ است.

تذکره با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی، مجموع هر دو

جمله‌ای که از ابتدا و انتهای بخشی از دنباله فاصله یکسانی دارند، با هم برابر است:

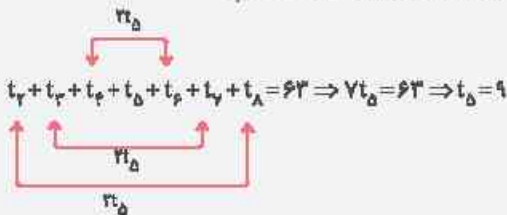


تست در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، رابطه

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 63$$

- ۱۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۲۳ (۳)
- ۱۸ (۴)

۴ با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:



بنابراین چون مجموع اندیس‌های t_4 و t_4 برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_4 + t_4 = 2t_4 = 2 \times 9 = 18$$

درج واسطه حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعدادی عدد دیگر قرار دهیم (درج کنیم) به طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، کافیست اعداد موردنظر را با جاهای خالی به صورت \bigcirc نمایش داده، سپس a و b را جملات اول و آخر گرفته و مقدار قدرنسبت را بیابیم.

۲ اگر رابطه‌ای بین جملات دنباله داده شود، می‌توانیم با استفاده از جمله عمومی، هر کدام از جمله‌های رابطه داده شده را بازنویسی کرده و عبارت را ساده کنیم.

مثال ۱ در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم از جمله

هفتم یک واحد بیشتر است. جمله چهارم دنباله را به دست آورید.

$$t_3 + t_8 = t_7 + 1 \Rightarrow (t_1 + 2d) + (t_1 + 7d) = t_1 + 6d + 1$$

$$\Rightarrow t_1 + 3d = 1 \Rightarrow t_1 = 1 - 3d$$

مثال ۲ مجموع سه جمله اول دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه

جمله بعدی است. جمله اول چند برابر قدرنسبت است؟

با توجه به صورت سؤال $t_1 + t_2 + t_3 = 4(t_4 + t_5 + t_6)$ است، پس:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 4(t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow 3t_1 + 3d = 12t_1 + 48d \Rightarrow 9t_1 = -45d \Rightarrow t_1 = -5d \Rightarrow \frac{t_1}{d} = -5$$

۳ در مواردی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی n (تعداد جملات

یا شماره جمله) را نداریم، با نوشتن فرمول جمله عمومی و حل معادله با نامعادله، مقدار n را می‌یابیم.

مثال ۱ کدام جمله از دنباله $12, 19, 26, 33, \dots$ برابر با ۸۹ است؟

$$t_n = 12 + (n-1)(7) \Rightarrow 12 + 7n - 7 = 89 \Rightarrow 7n = 84 \Rightarrow n = 12$$

مثال ۲ دنباله $7, 13, 19, 25, \dots$ چند جمله دورقمی دارد؟

$$t_n = 7 + (n-1)(6) \Rightarrow t_n = 6n + 1 \Rightarrow 10 \leq 6n + 1 \leq 99$$

$$\Rightarrow 9 \leq 6n \leq 98 \Rightarrow 2 \leq n \leq 16$$

پس تعداد جمله‌ها برابر است با:

$$16 - 2 + 1 = 15$$

تست در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع

سه جمله بعدی آن ۶۰ می‌باشد. جمله هشتم آن کدام است؟

- ۲۶ (۱)
- ۲۹ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۳۱ (۴)

۴ روابط داده شده را باز می‌کنیم:

$$1) t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3t_1 + 3d = 33$$

$$\Rightarrow t_1 + d = 11$$

$$2) t_4 + t_5 + t_6 = (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 60$$

$$\Rightarrow t_1 + 4d = 20$$

از روابط (۱) و (۲) مقادیر $t_1 = 8$ و $d = 3$ به دست می‌آیند، بنابراین

$$t_8 = t_1 + 7d = 8 + (7 \times 3) = 29$$

جمله هشتم برابر است با:

واسطه حسابی

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مجموع جملات اول و سوم، دو برابر جمله وسط است:

$$2b = a + c$$

جمله وسط یعنی b را واسطه حسابی a, c می‌نامند.



تست در دو دنباله حسابی $1, 3, 5, \dots$ و $2, 4, 6, \dots$ بعضی از جملات یکسان اند. هشتمین جمله مشترک آن‌ها کدام است؟

(۱) ۹۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۰۰

۱ قدرنسبت هر یک از دنباله‌ها و جمله اول مشترک را مشخص می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} 1, 3, 5, 7, 9, \dots \Rightarrow d_1 = 2 \\ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \Rightarrow d_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow d = [2, 2] = 2$$

اولین جمله مشترک = ۱۰

بنابراین جمله عمومی دنباله‌های مشترک به صورت زیر است:

$$a_n = 10 + (n-1) \times 2 = 2n + 8$$

در نتیجه جمله هشتم آن برابر است با:

$$a_8 = 2 \times 8 + 8 = 24$$

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۷ و جمله پانزدهم برابر ۲۲ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله را به دست آورید.

$$S_{15} = \frac{15}{2}(7 + 22) = \frac{15}{2} \times 29 = 15 \times 14.5 = 217.5$$

اگر در رابطه فوق، به جای a_n معادل آن یعنی $a_1 + (n-1)d$ را در جایگذاری کنیم، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

از این رابطه زمانی استفاده می‌کنیم که مقدار قدرنسبت (d) را داشته باشیم.

مثال مجموع ۹ جمله اول از یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ که جمله اول آن برابر ۳- است، را به دست آورید.

$$S_9 = \frac{9}{2}[2(-3) + (9-1)(4)] = \frac{9}{2}(-6 + 32) = \frac{9}{2} \times 26 = 117$$

تست مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله یازدهم به جمله هشتم برابر ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

(۱) $-13/6$ (۲) $-14/8$ (۳) $-15/6$ (۴) $-16/8$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = -26 \Rightarrow a_1 + 4.5d = -2.6 \quad (1)$$

$$\frac{a_{11}}{a_8} = 6 \Rightarrow a_1 + 10d = 6(a_1 + 7d) \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0 \quad (2)$$

با حل معادلات به دست آمده از (۱) و (۲) مقادیر a_1 و d را می‌توانیم پیدا کنیم.

$$d = -2 \text{ و } a_1 = 6/4 = 1.5 \Rightarrow a_{11} = a_1 + 10d = 1.5 + 10(-2) = -18.5$$

دنباله $1, 2, 3, \dots, (n-1), n$ یک دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدرنسبت ۱ است. بنابراین مجموع جملات اعداد طبیعی ۱ تا n با کمک رابطه S_n به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال بین دو عدد ۳ و ۱۹ سه واسطه حسابی درج می‌کنیم. بزرگ‌ترین واسطه درج شده را به دست آورید.

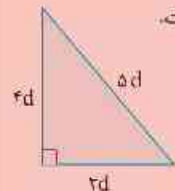
$$3, \text{واسطه}, \text{واسطه}, \text{واسطه}, 19 \Rightarrow a_4 = 19 \Rightarrow a_1 + 3d = 19 \Rightarrow 3 + 3d = 19 \Rightarrow 3d = 16 \Rightarrow d = 16/3$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۹ هستند که بزرگ‌ترین عدد درج شده برابر ۱۵ است.

سه جمله متوالی

در سؤالاتی که صحبت از مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی است اما شماره جمله‌ها مشخص نیست، می‌توانیم جمله‌ها را به صورت $x-d, x, x+d$ در نظر بگیریم. [این روش برای مجموع پنج جمله متوالی، هفت جمله متوالی و ... نیز قابل استفاده است].

نکته اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی یا قدرنسبت دهند، طول اضلاع برابر $2d, 4d, 5d$ است.



تست در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۹۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

(۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

۳ سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

پس سه جمله مورد نظر به صورت $5-d, 5, 5+d$ هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{aligned} (5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 &= 93 \\ 25 - 10d + d^2 + 25 + 10d + d^2 &= 93 \\ 50 + 2d^2 &= 93 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \end{aligned}$$

چون نمی‌دانیم دنباله مورد نظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و ۳- برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

جملات مشترک دو دنباله حسابی

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهد به طوری که:

- ۱** جمله اول آن برابر اولین جمله مشترک دو دنباله اولیه است.
- ۲** قدرنسبت آن برابر $m \cdot m$ قدرنسبت‌های دو دنباله اولیه است.



درس سوم | دنباله‌های حسابی و هندسی

تست حداقل چند جمله اول دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیش‌تر از ۵۰۰ شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳ باید S_n را بزرگ‌تر از ۵۰۰ قرار دهیم.

$$S_n > 500 \Rightarrow (1) \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) > 500 \Rightarrow \frac{1-2^n}{-1} > 500$$

$$\Rightarrow 1-2^n < -1000 \Rightarrow 1-1 < 2^n$$

با جایگذاری هر یک از گزینه‌ها در رابطه $2^n > 1001$ ، حداقل n ‌ای که در نامعادله صدق می‌کند عدد ۷ است.

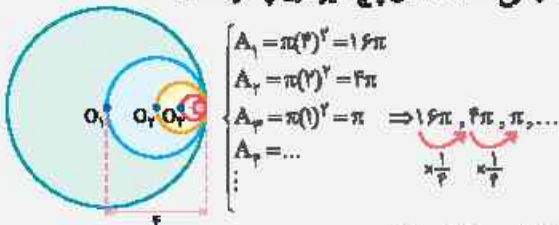
$$2^7 > 1001 \Rightarrow 2^7 > 1001 \Rightarrow 2187 > 1001$$

مسائل کاربردی دنباله هندسی

برخی مسائل مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی در قالب مسائل کاربردی مطرح می‌شوند. در این نوع مسائل بهتر است چند جمله اول دنباله را بنویسیم تا نوع دنباله مشخص شود.

مثال در شکل مقابل، در هر مرحله شعاع دایره‌ها نصف شده است.

مجموع مساحت‌های پنج دایره اول چقدر است؟



بنابراین خواهیم داشت:

$$S_5 = 16\pi \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 16\pi \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{64\pi}{3} \times \frac{1024 - 1}{1024} = \frac{34\pi}{16}$$

در بعضی از سؤالات مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی، درصدی از یک متغیر کم یا زیاد می‌شود و یا مقیاس شکل‌های هندسی با نسبت‌های یکسانی تغییر می‌کنند. راهکار حل این سؤالات این است که جملات دنباله تغییرات را بنویسیم تا بتوانیم قدرنسبت را مشخص کنیم.

تست بالی در دقیقه اول پرواز خود، ۲۴۰ متر از سطح زمین بالا می‌رود. در دقائق بعدی، به سرعت اوج‌گیری پالن افزوده شده، به طوری که در هر دقیقه مسافت طی شده توسط پالن ۲۰ درصد زیاد می‌شود. این پالن در دقیقه پنجم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۱) $1200 \cdot ((1/2)^5 - 1)$ ۲) $240 \cdot ((1/2)^5 - 1)$
 ۳) $1200 \cdot ((1/2)^4 - 1)$ ۴) $240 \cdot ((1/2)^4 - 1)$

۱ در هر دقیقه مسافت طی شده ۲۰ درصد زیاد می‌شود. بنابراین مسافت طی شده پالن در بازه‌های یک دقیقه‌ای، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۱/۲ و جمله اول ۲۴۰ تشکیل می‌دهد. بنابراین خواهیم داشت:

$$S_5 = 240 \cdot \left(\frac{1 - (1/2)^5}{1 - 1/2} \right) = 240 \cdot \left(\frac{(1/2)^5 - 1}{-1/2} \right) = 1200 \cdot ((1/2)^5 - 1)$$

تست در دنباله هندسی فرمولی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ مجموع شش جمله اول کدام است؟

۱) $\frac{41}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

۲ ابتدا مقدار قدرنسبت را به دست می‌آوریم.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2 \cdot q^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

اگر $q = \frac{1}{2}$ باشد، دنباله نزولی خواهد بود که خلاف فرض سؤال است، بنابراین $q = -\frac{1}{2}$ است. حالا به محاسبه S_6 می‌پردازیم:

$$S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2(1 - \frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{64}\right) \Rightarrow S_6 = \frac{21}{16}$$

رابطه S_{2n} با S_n

در بعضی از سؤالات دنباله هندسی، نسبت مجموع $2n$ جمله اول با n جمله اول را به مجموع n جمله اول می‌خواهند. برای حل این سؤالات از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n + q^{2n}$$

مثال در دنباله هندسی $3, 6, 12, 24, \dots$ مجموع ۶ جمله اول و

مجموع ۹ جمله اول به ترتیب چند برابر مجموع ۳ جمله اول هستند؟

قدرنسبت دنباله هندسی داده شده برابر $q = 2$ است. پس:

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 = 1 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$\frac{S_9}{S_3} = 1 + q^3 + q^6 = 1 + 2^3 + 2^6 = 1 + 8 + 64 = 73$$

تست در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، ده برابر

مجموع چهار جمله اول است. جمله a_4 چند برابر جمله a_1 است؟

۱) ۹ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

۲ می‌دانیم $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$ است. پس:

$$\frac{S_8}{S_4} = 10 \Rightarrow 1 + q^4 = 10 \Rightarrow q^4 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = (q^4)^2 = 9^2 = 81$$

مساکنات و نامساکنات در S_n

در سؤالاتی که جمله اول و قدرنسبت دنباله را داریم ولی n [تعداد جملات دنباله یا شماره جمله] در دست نباشد، با نوشتن فرمول مجموع n جمله اول و حل معادله یا نامعادله، مقادیر n را می‌یابیم.

مثال مجموع چند جمله از دنباله هندسی $2, 4, 8, \dots$ برابر ۵۱۰ است؟

$$S_n = 510 \Rightarrow (2) \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = 510 \Rightarrow (1-2^n)(-2) = 510$$

$$\Rightarrow 1-2^n = -255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

دنباله حسابی

برای حل سوالات دنباله حسابی، نوشتن جمله عمومی و قدر نسبت بسیار کمک‌کننده است.

داخل - ۱۳۰۱

۱۳۹. اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک انگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟
 ۱) $9/6$ ۲) $2/4$ ۳) $7/4$ ۴) $11/6$
۱۴۰. چه تعداد از اعداد زیر یکی از جمله‌های دنباله حسابی $... 8, 4, 0, -4, ...$ هستند؟
 الف) ۱۳۵ ب) ۱۴۵ ج) ۱۴۸ د) ۱۴۹
۱۴۱. جمله چندم از دنباله $... 123, 126, 129, ...$ برابر صفر است؟
 ۱) $43م$ ۲) $44م$ ۳) $45م$ ۴) $46م$
۱۴۲. دنباله حسابی $62, ..., 2, -2, -6, ...$ چند جمله دارد؟
 ۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹
۱۴۳. دنباله حسابی $... 60, 67, 74, ...$ چند جمله نامنفی دارد؟
 ۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲
۱۴۴. جمله هشتم دنباله حسابی $... 9, 7, 5, 3, ...$ کدام است؟
 ۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۳
۱۴۵. در یک دنباله حسابی جملات هفتم و یازدهم به ترتیب ۱۵ و ۴۳ هستند. بزرگ‌ترین جمله دورقمی این دنباله، جمله چندم است؟
 ۱) هفدهم ۲) هجدهم ۳) نوزدهم ۴) بیستم
۱۴۶. در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند و جمله نهم برابر با ۱۲ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟
 ۱) ۳ ۲) -2 ۳) ۸ ۴) -8
۱۴۷. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n اگر $t_5 = 3$ و $t_8 = 48 - t_p^2$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶
۱۴۸. تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟
 ۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) $27/5$ ۴) $28/5$
۱۴۹. در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول برابر ۹ و مجموع چهار جمله بعدی آن ۲۶ می‌باشد. جمله دهم این دنباله کدام است؟
 ۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) $10/5$ ۴) ۱۱
۱۵۰. در دنباله حسابی $... 1, 2, b, 3, ...$ حاصل $\frac{t_{20}}{t_p + t_y + t_q}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{41}{43}$ ۲) $\frac{41}{42}$ ۳) $\frac{40}{43}$ ۴) $\frac{40}{41}$
۱۵۱. در یک دنباله حسابی تساوی $62 = 2t_1 + t_2$ برقرار است. مقدار t_p کدام است؟
 ۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵
۱۵۲. مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی ۴ برابر مجموع سه جمله بعدی آن است. جمله ششم کدام است؟
 ۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲
۱۵۳. در یک دنباله حسابی تفاضل جمله چهارم از جمله دوازدهم برابر ۱۶ است. تفاضل جمله بیستم از جمله بیست و پنجم کدام است؟
 ۱) ۲۸ ۲) ۱۰ ۳) ۲۶ ۴) ۷
۱۵۴. اگر از قدرنسبت یک دنباله حسابی $\frac{3}{4}$ کم کنیم، جمله یازدهم آن چه تغییری می‌کند؟
 ۱) دو برابر می‌شود. ۲) ۱۵ واحد کم می‌شود.
 ۳) ۲ واحد اضافه می‌شود. ۴) تغییری نمی‌کند.

۱۵۵. در یک دنباله حسابی $t_n = 3$ است. مقدار $\frac{t_{12}}{t_4}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{17}{7}$ ۲ $\frac{16}{6}$ ۳ $\frac{17}{8}$ ۴ $\frac{16}{5}$

۱۵۶. جملات متوالی دنباله حسابی t_n به صورت $\dots, 2y + x$ و $y + 6, 2$ است. جمله t_x کدام است؟

- ۱ ۱۶ ۲ ۲۰ ۳ ۲۴ ۴ ۲۸

۱۵۷. در یک دنباله حسابی اگر جمله اول برابر $x+1$ و جمله دوم برابر $1-2x$ و جمله پنجم برابر $4x$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

۱۵۸. در دنباله حسابی $\dots, 2, 5, 8, \dots$ با جمله عمومی t_n ، جملات t_1, t_2, t_3, \dots نیز یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ ۱۸ ۲ ۱۹ ۳ ۲۲ ۴ ۲۰

۱۵۹. چند عدد طبیعی سه رقمی با یکان ۶ وجود دارد؟

- ۱ ۹۵ ۲ ۱۰۵ ۳ ۱۰۰ ۴ ۹۰

۱۶۰. تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ کدام است؟

- ۱ ۱۵ ۲ ۲۵ ۳ ۲۶ ۴ ۱۹

۱۶۱. اگر $1-2x, 2x, 3x, x+2$ به ترتیب جملات نهم، دهم و یازدهم یک دنباله حسابی صعودی باشند، جمله بیست و دوم این دنباله کدام است؟

- ۱ ۱۱ ۲ ۱۵ ۳ ۱۷ ۴ ۲۰

۱۶۲. در دنباله حسابی $2, a, b, c, d, e, 22$ حاصل عبارت $a-b+c-d+e$ کدام است؟

- ۱ ۱۱۵ ۲ ۹۲ ۳ ۶۹ ۴ ۲۳

۱۶۳. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n مقدار عبارت $A = \frac{t_3 + t_5 + t_7 + t_9 + t_{11}}{t_4 + t_{12}}$ چقدر است؟

- ۱ ۱/۷ ۲ ۲ ۳ ۲/۵ ۴ ۳/۸

۱۶۴. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی t_n اگر جمله دوم ۳ برابر جمله اول باشد، حاصل $\frac{t_7 + t_5 + \dots + t_{18}}{t_{16} + t_{17} + t_{18}}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{25}{11}$ ۲ $\frac{29}{11}$ ۳ $\frac{25}{9}$ ۴ $\frac{29}{9}$

۱۶۵. در یک دنباله حسابی با ۱۵ جمله، مجموع دو جمله اول برابر با ۷ و مجموع دو جمله آخر برابر با ۱۷ است. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم کدام است؟

- ۱ ۲۰ ۲ ۱۸ ۳ ۲۲ ۴ ۱۹

۱۶۶. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $t_n = 63 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 - t_8 - t_9 - t_{10}$ باشد، مقدار $t_1 + t_9$ کدام است؟

- ۱ ۱۹ ۲ ۱۰ ۳ ۲۳ ۴ ۱۸

وقتی مجموع سه جمله متوالی یا پنج جمله متوالی از یک دنباله حسابی رو داریم، می‌تونیم باید جمله هارو چجوری در نظر بگیریم؟ تست تیررو با پاسخ بررسی کنید.

۱۶۷. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۹۳ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ ± 1 ۲ ± 2 ۳ ± 3 ۴ ± 4

۱۶۸. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی صعودی برابر با ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۱۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۳ ۴ -۳

درج واسطه حسابی بین دو جمله، خیلی موضوع مهمیه. از تست‌های زیر فافل نشید!

۱۶۹. بین دو عدد ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم. اگر این دنباله حسابی با ۱۸ شروع شود، جمله سیزدهم آن کدام است؟

- ۱ ۱۳۲ ۲ ۱۴۰ ۳ ۱۴۶ ۴ ۱۵۰

۱۷۰. بین دو عدد ۱۵ و ۲۷ یک بار سه واسطه حسابی و بار دیگر پنج واسطه حسابی درج می‌کنیم. مجموع بزرگ‌ترین واسطه‌های درج شده کدام است؟

- ۱ ۴۹ ۲ ۵۱ ۳ ۶۰ ۴ ۶۲

دو سؤال بعدی مربوط به تشکیل دنباله حسابی در مثلث هستند.

۱۷۱. اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنباله حسابی بدهند، کدام یک از زاویه‌های زیر قطعاً یکی از زاویه‌های این مثلث است؟

- ۱ 30° ۲ 45° ۳ 60° ۴ 90°

۱۷۲. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. محیط مثلث چند برابر طول وتر است؟

- ۱ $2/4$ ۲ $1/8$ ۳ $3/2$ ۴ $2/6$

جمله‌های مشترک دو دنباله حسابی، یک دنباله حسابی تشکیل میدن! تست‌های زیر مربوط به این موضوع است.

۱۷۳. در دو دنباله حسابی به صورت‌های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

- ۱ 58 ۲ 59 ۳ 60 ۴ 61

۱۷۴. در دو دنباله حسابی $2, 1, 4, 7, \dots$ و $1, 6, 11, 16, \dots$ کوچک‌ترین جمله مشترک سه رقمی کدام است؟

- ۱ 104 ۲ 106 ۳ 110 ۴ 100

۱۷۵. در دو دنباله حسابی $1, 3, 5, \dots$ و $2, 7, 12, 17, \dots$ دهمین جمله مشترک کدام است؟

- ۱ 97 ۲ 100 ۳ 98 ۴ 91

۱۷۶. جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی

باشد، جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟

- ۱ $\frac{6}{5}$ ۲ $\frac{8}{5}$ ۳ 3 ۴ 4

۱۷۷. در ردیف اول یک استادبوم ورزشی ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۹ و در ردیف سوم ۲۳ صندلی وجود دارد. اگر تعداد صندلی‌ها به همین منوال

افزایش یابد، در ردیف بیستم چند صندلی خواهیم داشت؟

- ۱ 91 ۲ 98 ۳ 90 ۴ 102

۱۷۸. در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت l ، تساوی $6a_7 = 5a_8 + 3a_6$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به l ، کدام

می‌توان باشد؟

- ۱ 1 ۲ $1/5$ ۳ $2/5$ ۴ 4

۱۷۹. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n رابطه $a_n = a_{n-2} + 4$ برقرار است. اگر $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 27$ باشد، جمله ششم

کدام است؟

- ۱ 4 ۲ $4/5$ ۳ 5 ۴ $5/5$

۱۸۰. در یک دنباله حسابی رابطه $a_1 - a_2 = -1$ و $\sqrt{4a_1^2 - 2a_1 + 1} - a_2 = -1$ برقرار است. اگر $a_7 = -18$ باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای قدرنسبت این

دنباله کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ -5 ۴ -7

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

۱۸۱. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۱۲- و قدرنسبت برابر ۵ است. مجموع ۱۴ جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱ 212 ۲ 254 ۳ 287 ۴ 294

۱۸۲. در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ما قبل خود به اندازه $\frac{1}{p}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

- ۱ $22/5$ ۲ 25 ۳ $27/5$ ۴ 20

۱۸۳. مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم برابر ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

- ۱ $-12/6$ ۲ $-14/8$ ۳ $-15/6$ ۴ $-16/8$

۱۸۴. در یک دنباله حسابی مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن ۱۰ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱ -5 ۲ -4 ۳ -3 ۴ -2

خارج - ۹۳

نوبت اول - ۱۳۰۲

نوبت دوم - ۱۳۰۷

- سوال ۱۸۵ (تستی)** در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟
 ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱
- سوال ۱۸۶ (تستی)** در یک دنباله حسابی، اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه کنیم، به مجموع ده جمله اول چند واحد اضافه می شود؟
 ۹ ۱۰ ۴۵ ۵۰
- سوال ۱۸۷ (تستی)** اگر از جمله اول یک دنباله حسابی دو واحد کم کنیم و قدرنسبت آن را یک واحد افزایش دهیم، مجموع ۸ جمله اول دنباله چه تغییری می کند؟
 ۱۲ واحد افزایش می یابد. ۷ واحد افزایش می یابد.
 ۱۲ واحد کاهش می یابد. ۷ واحد کاهش می یابد.
- سوال ۱۸۸ (تستی)** مجموع ۲۰ عدد طبیعی متوالی با شروع از عدد ۱ چند برابر مجموع ۱۰ عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ است؟
 ۱/۵۶ ۲/۸ ۲/۲۲ ۲/۴
- سوال ۱۸۹ (تستی)** در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟
 ۲۲ ۲۶ ۲۴ ۲۸
- سوال ۱۹۰ (تستی)** در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع جملات دهم تا بیستم چقدر است؟
 ۱۸۷/۵ ۱۹۲/۵ ۲۷۶/۵ ۲۱۰/۵
- سوال ۱۹۱ (تستی)** در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟
 ۳ ۴ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$
- سوال ۱۹۲ (تستی)** حداقل چند جمله اول از دنباله حسابی $... - 72, - 77, - 82, ...$ را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود؟
 ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶
- سوال ۱۹۳ (تستی)** در دنباله حسابی $... 5, 8, 11, ...$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟
 ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹
- سوال ۱۹۴ (تستی)** در بیست جمله اول دنباله حسابی، مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول کدام است؟
 صفر ۱ ۲ ۳
- سوال ۱۹۵ (تستی)** اگر $1, 3, 7, \frac{5}{4}, \dots$ جملات ابتدایی یک دنباله حسابی متناهی با بیست جمله باشند مجموع جملات شماره های زوج کدام است؟
 ۵۰ ۵۸ ۶۰ ۶۴
- سوال ۱۹۶ (تستی)** مجموع جملات دنباله اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۰ کدام است؟
 ۸۱۶ ۸۵۲ ۸۶۷ ۸۸۴
- سوال ۱۹۷ (تستی)** مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟
 ۹ $\frac{29}{3}$ $\frac{49}{3}$ ۱۸
- سوال ۱۹۸ (تستی)** مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 - 5n$ است. جمله هفتم این دنباله کدام است؟
 ۷ ۸ ۱۱ ۱۵
- سوال ۱۹۹ (تستی)** در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $t_n = 2n + 1$ ، مجموع n جمله اول آن به صورت $S_n = 2n^2 + bn$ است. مجموع ۵ جمله اول کدام است؟
 ۷۵ ۸۰ ۱۱۰ ۹۵
- سوال ۲۰۰ (تستی)** یک دنباله حسابی دارای پانزده جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۹ باشد، مجموع پانزده جمله چقدر است؟
 ۲۵ ۲۶ ۴۵ ۶۰
- سوال ۲۰۱ (تستی)** در یک دنباله حسابی اگر $S_{15} = S_{11}$ باشد، مجموع ۲۶ جمله اول آن کدام است؟
 ۱۱ ۱۵ ۲۶ صفر



در یک دنباله حسابی $S_7 - S_4 = 5$ است. مجموع جملات ششم تا دوازدهم کدام است؟

- ۱) $\frac{25}{3}$ ۲) 10 ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) 12

در یک دنباله حسابی رابطه $1 + S_n = 2n + S_{n-1}$ برقرار است. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

- ۱) 25 ۲) 80 ۳) 90 ۴) 100

در دنباله‌های حسابی $1, 6, 11, \dots$ و $7, 11, 15, \dots$ مجموع جملات مشترک دو رقمی کدام است؟

- ۱) 280 ۲) 255 ۳) 246 ۴) 232

در یک دنباله حسابی متناهی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۰ و مجموع سه جمله آخر برابر ۵۶ است. مجموع جملات این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) 98 ۲) 132 ۳) 150 ۴) 75

بین دو عدد ۲ و $7 + 9\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

- ۱) $3 \cdot (2 + \sqrt{2})$ ۲) $48\sqrt{2}$ ۳) $3 \cdot (1 + \sqrt{2})$ ۴) $26(1 + \sqrt{2})$

بین دو عدد ۸ و ۹۵، بیست و هشت عدد را طوری قرار می‌دهیم که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند. مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟

- ۱) 810 ۲) 780 ۳) 760 ۴) 720

با توجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$ کدام است؟

- ۱) 0.15 ۲) 0.18 ۳) 0.24 ۴) 0.25

در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دوندۀ باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی برود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد مجموعاً چند توپ در سبد انداخته است؟

- ۱) ۱۶
۲) ۱۷
۳) ۱۸
۴) ۱۹



دنباله هندسی

برای حل تست‌های دنباله هندسی هم سعی کنید در اولین قدم اثر نسبت و جمله اول رو پیدا کنید. توی حل این سؤالا خیلی ولت‌ها نقره جمله‌ها یا عبارتها رو بر هم دیگه تقسیم کنیم.

جمله پنجم دنباله هندسی $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ برابر ۵۱۲ است؟

- ۱) دوازدهم ۲) سیزدهم ۳) چهاردهم ۴) پانزدهم

در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله هفتم برابر ۵ و جمله دهم برابر ۱۳۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

در یک دنباله هندسی به صورت $\dots, 45, 135, \dots$ جمله ششم کدام است؟

- ۱) 402 ۲) 405 ۳) 465 ۴) 480

در دنباله هندسی $\dots, d, e, \dots, \frac{1}{4}, c, b, a, \dots$ مقدار e کدام است؟ ($d > 0$)

- ۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

- ۱) 891 ۲) 972 ۳) 1056 ۴) 1296

درس سوم | دنباله‌های حسابی و هندسی

۲۱۵. در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، اگر مجموع جملات اول و دوم نصف مجموع جملات سوم و چهارم آن باشد، قدرنسبت کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ 2 ۴ $\sqrt{5}$

۲۱۶. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۵۲ و مجموع سه جمله دوم برابر ۵۱۳ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

کنکور مجدد - ۱۳۹۱

- ۱ ۲۲ ۲ ۲۴ ۳ ۱۸ ۴ ۱۶

۲۱۷. در یک دنباله هندسی $t_1 = 2$ و $t_8 = t_9^2$ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۱۸. در یک دنباله هندسی $t_8 \times t_6 = t_{11}$ است. تفاضل قدرنسبت از جمله اول کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ ۲

۲۱۹. در یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{4}$ و قدرنسبت ۰.۳، اگر قدرنسبت را یک واحد افزایش دهیم، جمله سوم چند برابر می‌شود؟

- ۱ $\frac{16}{9}$ ۲ $\frac{16}{10}$ ۳ $\frac{15}{9}$ ۴ $\frac{15}{10}$

۲۲۰. در یک دنباله هندسی اگر حاصل ضرب ۲۰ جمله اول برابر ۱۰۲۴ باشد، حاصل ضرب جمله دهم و یازدهم کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۸ ۳ ۶ ۴ ۱۴

۲۲۱. در یک دنباله هندسی هر جمله ۲ برابر جمله قبلی آن است. اگر جمله پنجم این دنباله برابر ۱ باشد، حاصل ضرب پانزده جمله اول آن کدام است؟

- ۱ ۲۳۰ ۲ ۲۴۵ ۳ ۳۰۰ ۴ ۳۱۰۵

۲۲۲. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n که $a_5 = 3^5 \times 5$ و قدرنسبت برابر ۳ است. جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱ ۱۶ ۲ ۱۵ ۳ ۱۷ ۴ ۱۸

۲۲۳. در یک دنباله هندسی با جمله اول $t_1 = \frac{1}{9}$ ، هر جمله سه برابر جمله قبلی خودش است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

- ۱ $3n - 2$ ۲ $3n - 1$ ۳ $3n + 1$ ۴ $3n$

در حل سؤالای بعدی استفاده از واسطه هندسی کمک‌کننده است. توی این سؤال‌ها به معمولی یا نزولی بودن دنباله دقت کنید.

۲۲۴. به ازای یک مقدار x اعداد $x, x - 8, x, x + 12$ به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی نزولی‌اند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{2}{9}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{1}{9}$

۲۲۵. اگر اعداد $2, 2 + a, 2 + a + a^2, 2 + a + a^2 + a^3$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مجموع این سه جمله کدام است؟

- ۱ $18\frac{1}{5}$ ۲ $19\frac{1}{5}$ ۳ ۱۸ ۴ ۱۹

۲۲۶. اعداد $2^a, 2^b$ و 2^c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند. واسطه حسابی بین a و b کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{5}$ ۲ ۲ ۳ 75 ۴ $\sqrt{2}$

۲۲۷. اگر a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی و a, b, c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

- ۱ ۱۹۶ ۲ ۱۴۴ ۳ ۲۰۴ ۴ ۲۱۶

۲۲۸. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد $3, b - 1, a + 1$ تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. مقدار b کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۷ ۳ ۸ ۴ ۹

۲۲۹. به اعداد $1, 7, 25$ مقدار ثابتی اضافه می‌کنیم تا اعداد حاصل یک دنباله هندسی نزولی تشکیل دهند. قدرنسبت دنباله هندسی به وجود آمده کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{2}$

برای حل سؤال‌های زیر، استفاده از قانون اندیس‌ها خیلی کمک‌کننده است.

۲۳۰. در دنباله هندسی $a, b, \sqrt{5}, c, d, \dots$ حاصل $abcd$ کدام است؟

- ۱ ۲۱ ۲ ۲۱ ۳ ۲۵ ۴ ۲۵

۲۳۱. در یک دنباله هندسی اگر $t_5 = 2^{x+y}$ ، $t_8 = \frac{A^x}{y}$ ، $t_{11} = 16 \times 4^{x-y}$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

- ۱ $x + 2y = 6$ ۲ $2x + y = 6$ ۳ $2x - y = 5$ ۴ $x - 2y = 5$

۲۳۲. در یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\sqrt[3]{3}$ حاصل $\frac{t_1 \times t_{13} + t_5 \times t_9}{t_7 \times t_8}$ کدام است؟

- ۴ ۶ ۸ ۱۰

۲۳۳. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n که $a_5 = 5$, $a_7 = 16$ است. حاصل $a_7 \times a_9$ کدام است؟

- ۸۵ ۸۲ ۸۰ ۸۶

۲۳۴. دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟

ریاضی داخل - ۱۳۰۱

- ۲ ۴ ۶ ۷

۲۳۵. اگر $\log_4 8, \log_{\sqrt[5]{8}} a, \log_4 27$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مقدار a کدام است؟

- ۱/۵ ۳ ۴۱/۵ ۵

۲۳۶. بین دو عدد ۲ و ۹۷۲ چهار واسطه هندسی درج می‌کنیم. مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این واسطه‌ها کدام است؟

- ۲۳۶ ۳۳۸ ۳۴۰ ۳۴۲

۲۳۷. بین دو عدد ۳ و ۴۸ یک باز سه واسطه هندسی درج می‌کنیم و عدد وسط را A می‌نامیم. بار دیگر چهار واسطه حسابی درج می‌کنیم و بزرگ‌ترین آن واسطه‌ها را B می‌نامیم. مقدار $A \times B$ کدام است؟

- ۴۵۲ ۴۶۸ ۴۷۲ ۴۸۰

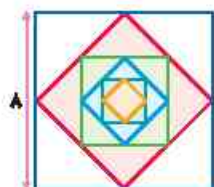
۲۳۸. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی برابر با ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. بزرگ‌ترین عدد بین این سه جمله کدام است؟

- ۸ ۹ ۱۰ ۱۱

۲۳۹. دمای آب موجود در یک مخزن آب در هر ساعت ۱۰ درصد گرم‌تر می‌شود. اگر دمای فعلی آب ۵۰ درجه باشد پس از A ساعت دمای آن تقریباً چند درجه خواهد بود؟

- ۸۴ ۷۲/۵ ۹۲/۵ ۱۰۷

۲۴۰. وسط‌های اضلاع مربعی به ضلع A سانتی‌متر را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا مربع چندینی به وجود آید. اگر این کار را ادامه دهیم، محیط پنجمین مربع کدام است؟



- ۴ $4\sqrt{2}$ ۸ $8\sqrt{2}$

۲۴۱. یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شده قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

فازج - ۱۳۰۱

- ۳ ۶ ۹ ۱۲

۲۴۲. در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، اگر جمله سوم، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ و واحد بیشتر از جمله پنجم باشد و مجموع جملات سوم و پنجم برابر $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ باشد قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۲۴۳. در یک دنباله هندسی، اگر تفاضل جمله اول از جمله چهارم ۵ برابر مجموع سه جمله اول آن باشد، جمله هفتم چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱۵ ۲۲ ۲۰ ۲۶

از اینجا به بعد سؤالات ترکیبی دنباله حسابی و هندسی رو برتون قرار دادیم.

۲۴۴. در دنباله‌ای که هم هندسی است و هم حسابی، حاصل $\frac{3t_5 + 5t_7}{t_8}$ کدام است؟

- ۲ ۳ ۵ ۸

۲۴۵. اگر x و y اعدادی صحیح بوده به طوری که $2x - 2y + 2$ و $3x + 2y - 4$ هم جملات متوالی دنباله حسابی و هم جملات متوالی دنباله هندسی باشند، مقدار x^y کدام است؟

- ۲^۲ ۲^۳ ۲^۴ ۲^۱

درس سوم | دنباله‌های حسابی و هندسی

۲۴۶. اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ و نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ $\sqrt{2}$ ۴ $\frac{1}{2}$ **پاسخ: صورت دوم - ۱۴۰۲**

۲۴۷. جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱ $\frac{4}{3}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ ۲ ۴ $\frac{9}{4}$ **پاسخ: ۶۶**

۲۴۸. اگر جملات دوم، دو برابر جمله چهارم و چهار برابر جمله هفتم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱ $\frac{4}{3}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ ۲ ۴ ۳

۲۴۹. در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌هاست؟

- ۱ $2+\sqrt{3}$ ۲ $5+2\sqrt{3}$ ۳ $5+4\sqrt{3}$ ۴ $7+4\sqrt{3}$ **پاسخ: ۶۳**

۲۵۰. در یک دنباله هندسی غیرثابت، جمله پنجم واسطه حسابی بین جملات سوم و هفتم است. اگر $a_1 = 5$ باشد حاصل $a_1 + a_2 + a_3$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۵ ۳ ۱۵ ۴ -۴۵

۲۵۱. در یک دنباله حسابی جمله چهارم، ۴ برابر جمله اول یک دنباله هندسی و جمله نهم دنباله حسابی به ترتیب ۳ برابر جمله دوم و برابر جمله سوم آن دنباله هندسی است. اگر جمله چهارم دنباله هندسی ۱۲۵ باشد مجموع قدرنسبت دنباله حسابی و هندسی کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۶ ۵ ۸

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

۲۵۲. در دنباله هندسی غیرنزولی $\dots, \frac{1}{p}, \frac{1}{x}, 2$ مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ۱ $\frac{41}{22}$ ۲ $\frac{21}{16}$ ۳ $\frac{11}{8}$ ۴ $\frac{23}{16}$

۲۵۳. در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول است؟

- ۱ ۶۵ ۲ ۶۳ ۳ ۱۲۷ ۴ ۱۲۹

۲۵۴. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- ۱ $\frac{81}{16}$ ۲ ۸ ۳ ۹ ۴ ۱۶

۲۵۵. در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، ده برابر مجموع چهار جمله اول است. جمله a_8 چند برابر جمله a_1 است؟

- ۱ ۹ ۲ ۸۱ ۳ ۱۰ ۴ ۱۰۰

۲۵۶. مجموع n جمله اول از یک دنباله هندسی به صورت $S_n = \frac{5(3^n - 2)}{2}$ است. در این دنباله جمله پنجم کدام است؟

- ۱ ۲۵۵ ۲ ۲۰۵ ۳ ۲۲۰ ۴ ۲۸۰

۲۵۷. به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2, 2x, x^2 + 4, x^2$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع ۷ جمله این دنباله کدام است؟

- ۱ $\frac{117}{16}$ ۲ $\frac{125}{16}$ ۳ $\frac{63}{4}$ ۴ $\frac{127}{8}$ **پاسخ: ۶۳**

۲۵۸. بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

- ۱ ۴۸۲ ۲ ۴۸۴ ۳ ۴۸۶ ۴ ۴۸۸ **پاسخ: ۶۱**

۲۵۹. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی a_n اگر $t_1 - t_2 = 20$ و $t_2 - t_3 = 10$ باشد، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

- ۱ ۲ ۲ $1+\sqrt{2}$ ۳ ۳ ۴ $2\sqrt{2}$

۲۶۰. حداقل چند جمله اول دنباله هندسی $1, 2, 9, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیش‌تر از ۵۰۰ شود؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۲۶۱. **نسبت** مقدار $\frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^6} \times \dots \times \frac{1}{3^{256}}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{255}{3^{256}}$ ۲ $\frac{62}{3^{256}}$ ۳ $\frac{122}{3^{512}}$ ۴ $\frac{122}{3^{256}}$

۲۶۲. **نسبت** در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ۱ $10/8$ ۲ $11/2$ ۳ $12/6$ ۴ $12/4$

۲۶۳. **نسبت** تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات ۳ برابر جملات با شماره فرد باشد قدرنسبت آن کدام است؟ **داخل-۶۳**

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ 2 ۴ 3

۲۶۴. **نسبت** در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج، مجموع تمام جملات ۵ برابر مجموع جملات، شماره فرد است. جمله پنجم چند برابر جمله سوم است؟

- ۱ 4 ۲ 8 ۳ 16 ۴ 16

۲۶۵. **نسبت** حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- ۱ $32(1 + \sqrt{2})$ ۲ $16(\sqrt{2} - 1)$ ۳ $3(1 + \sqrt{2})$ ۴ $15(\sqrt{2} - 1)$

۲۶۶. **نسبت** از معادله $4x + 2x + x + \dots + \frac{x}{8} = 126$ مقدار x کدام است؟

- ۱ 4 ۲ 8 ۳ 16 ۴ 20

۲۶۷. **نسبت** حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^8 + t^7 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ **داخل-۶۳**

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 5

۲۶۸. **نسبت** اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشند به طوری که $a + b + c = 12$ ، $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ باشد آنگاه b کدام است؟

- ۱ 3 ۲ 5 ۳ 6 ۴ 8

۲۶۹. **نسبت** در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۴ واحد بیشتر از مجموع سه جمله اول و مجموع نه جمله اول ۳۲ واحد بیشتر از مجموع شش جمله اول است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۱ $1 + \sqrt{2}$ ۲ 2 ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $2 + \sqrt{2}$

۲۷۰. **نسبت** تویی پرروی نیم دایره‌های بالای یک محور با شعاع اولیه ۳۲ واحد حرکت می‌کند. هر بار که به محور برخورد می‌کند، ۵۰ درصد از اندازه شعاع آن کاسته می‌شود. اندازه شعاع این نیم دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند مجموع ۵ جمله اول این دنباله کدام است؟



- ۱ 60 ۲ 62 ۳ 63 ۴ 61

NOTE

نامساوی مثلث، معادلات قدرمطلق و روش هندسی حل معادلات

درس ۳۴

نامساوی مثلث

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، طبق نامساوی مثلث همواره $|a+b|$ بزرگتر یا مساوی $|a+b|$ است.

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

در نامساوی مثلث، اگر a و b هم علامت نباشد، قطعاً $|a|+|b|$ بزرگتر از $|a+b|$ است. اما اگر a و b هم علامت باشند، $|a|+|b|$ برابر $|a+b|$ است.

نامساوی مثلث

$ab \geq 0$ (۲)	$ab < 0$ (۱)
$ a+b = a + b $	$ a+b < a + b $

نامساوی‌های مهم در قدرمطلق به صورت زیر است:

۱ نامساوی $|x| < a$ نشان دهندهٔ تقاطعی بر روی محور اعداد حقیقی است که فاصله آن‌ها از صفر کمتر از عدد حقیقی و مثبت a است. در واقع، این نامساوی نشان دهندهٔ x هایی است که بین a و $-a$ قرار دارند.

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Rightarrow$$

۲ نامساوی $|x| > a$ نشان دهندهٔ تقاطعی بر روی محور اعداد حقیقی است که فاصله آن‌ها از صفر بیشتر از عدد حقیقی a است.

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a \Rightarrow$$

واضح است اگر a منفی باشد، نامعادلهٔ $|x| > a$ همواره برقرار است و ولی نامعادلهٔ $|x| < a$ جواب ندارد.

نمایش نامساوی‌های $|x| \leq a$ و $|x| \geq a$ به صورت زیر است:

$ x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$	$ x \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$

تست کدام نامعادله نشان دهندهٔ تقاطعی از محور اعداد حقیقی است

که در بازهٔ $[-۳, ۵]$ قرار دارند؟

$ x-۴ \leq ۱$ (۲)	$ x-۱ \leq ۴$ (۱)
$ x-۴ \geq ۱$ (۴)	$ x-۱ \geq ۲$ (۳)

۱ وسط بازه $-۳ \leq x \leq ۵$ برابر $\frac{(-۳)+(۵)}{۲} = ۱$ است. حال برای این‌که بتوانیم از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده کنیم و این بازه را به صورت قدرمطلق نمایش دهیم، از طرفین آن واحد کم می‌کنیم تا بازه متقارن شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$-۳ \leq x \leq ۵ \xrightarrow{-۱} -۴ \leq x-۱ \leq ۴ \Rightarrow |x-۱| \leq ۴$$

انواع معادلات قدرمطلق

جواب‌های معادلهٔ $|f(x)| = g(x)$ با شرط $g(x) \geq 0$ از حل دو معادلهٔ زیر

$$f(x) = \pm g(x)$$

به دست می‌آید.

$$|۲x^۲-۳| = x^۲+۱$$

$$\xrightarrow{x^۲+1 > 0} \begin{cases} ۲x^۲-۳ = x^۲+1 \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ ۲x^۲-۳ = -(x^۲+1) \Rightarrow ۳x^۲ = ۲ \\ \Rightarrow x^۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{۲}{۳}} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^۲-۲x+1} = ۲x+1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^۲} = ۲x+1$$

$$\Rightarrow |x-1| = ۲x+1 \Rightarrow \begin{cases} ۲x+1 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \\ ۲x+1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = ۲x+1 \Rightarrow x = -۲ \\ x-1 = -(۲x+1) \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \end{cases}$$

از میان جواب‌های به دست آمده فقط $x = ۰$ در شرط $۲x+1 \geq 0$ صدق می‌کند.

مثال نامساوی $|۲x-۳| < |x-۱| + |x-۲|$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟

با توجه به این‌که $(x-۲) + (x-۱) = (۲x-۳)$ است، داریم:

$$\left| \frac{۲x-۳}{a+b} \right| < \left| \frac{x-۱}{a} \right| + \left| \frac{x-۲}{b} \right|$$

$$\xrightarrow{a \text{ و } b \text{ غیرهم علامتند}} \frac{a}{ab} < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

تست معادلهٔ $|۳x+۴| + |x-۱| = |۲x+۵|$ چند جواب صحیح دارد؟

$$۱(۱) \quad ۲(۲) \quad ۳(۳) \quad ۴(۴)$$

۳ از آن جایی که $-a = |a|$ ، می‌توانیم به جای $|x-۱|$ بنویسیم $|۱-x|$ تا بتوانیم از نامساوی مثلث در حالت تساوی استفاده کنیم:

$$\left| \frac{۲x+۴}{a} \right| + \left| \frac{۱-x}{b} \right| = \left| \frac{۲x+۵}{a+b} \right| \xrightarrow{a, b \text{ هم علامتند}} \frac{a}{ab} \geq 0 \Rightarrow (۲x+۴)(۱-x) \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{۴}{۳} \leq x \leq ۱$$

بنابراین اعداد $\pm ۱, ۰$ جواب‌های صحیح این معادله هستند.

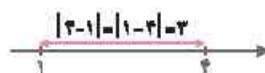
قدرمطلق به عنوان فاصله

می‌دانیم از نظر هندسی، مقدار $|x|$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ x از نقطهٔ صفر بر روی محور اعداد حقیقی است.



مقدار $|a-b|$ نشان دهندهٔ فاصلهٔ نقطهٔ a از نقطهٔ b بر روی محور اعداد حقیقی است.

فاصلهٔ نقطهٔ ۱ از نقطهٔ ۴ بر روی محور اعداد حقیقی برابر ۳ است:



مثلاً جواب‌های معادلهٔ $|x-۳| = ۲$ ، نقاطی بر روی محور اعداد حقیقی هستند که فاصلهٔ آن‌ها از ۳ برابر ۲ باشد.



تست مجموع جواب‌های معادله $|2x-1|+|x+2|=3$ کدام است؟

(خرج-۹۸)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{4}{3}$

۲) ریشه عبارت داخل قدرمطلق‌ها $x = -\frac{1}{2}$ و $x = -2$ است. بنابراین معادله را در سه ناحیه حل می‌کنیم:

۱) $x < -2$: $-(2x-1) - (x+2) = 3 \Rightarrow -3x - 1 = 3 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ ✗

۲) $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$: $-(2x-1) + (x+2) = 3 \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$ ✓

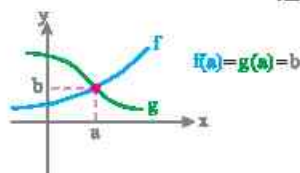
۳) $x > -\frac{1}{2}$: $(2x-1) + (x+2) = 3 \Rightarrow 3x + 1 = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ ✓

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ است.

روش هندسی حل معادلات

برای به دست آوردن جواب‌های $f(x) = g(x)$ یک راهکار این است که نمودار هر دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم و طول نقاط تلاقی را مشخص کنیم. این روش حل معادله را روش هندسی [نموداری] حل معادلات می‌نامند.

فرض کنید نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد. با توجه به این که در $x = a$ ، عرض دو تابع با هم برابر است، پس ریشه معادله $f(x) = g(x)$ یا $f(x) - g(x) = 0$ است.



از طریق روش هندسی، می‌توان تعداد، علامت و همچنین مقدار تقریبی [و گاهی دقیق] جواب‌ها را مشخص کرد.

تست معادله $|x^2-1|=x$ چند جواب مثبت دارد؟

- ۱) صفر ۲) ۳
۲) ۳ ۳) ۲

۳) نمودار دو تابع $f(x) = |x^2-1|$ و $g(x) = x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد جواب‌های معادله $|x^2-1|=x$ مشخص شود.



با توجه به شکل، معادله داده شده دو جواب مثبت دارد.

با توجه به ویژگی‌های قدرمطلق جواب‌های معادله $|f(x)| = a$ به ازای $a \geq 0$ از حل دو معادله زیر به دست می‌آید:

$f(x) = \pm a$

$|2x-5|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5=3 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4 \\ 2x-5=-3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

$||x|-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x|-1=3 \Rightarrow |x|=4 \Rightarrow x=\pm 4 \\ |x|-1=-3 \Rightarrow |x|=-2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$

جواب‌های معادله $|f(x)| = |g(x)|$ از حل دو معادله زیر به دست می‌آید:

$f(x) = \pm g(x)$

$|2x-3|=|x+5| \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=x+5 \Rightarrow x=8 \\ 2x-3=-(x+5) \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

یک روش دیگر برای حل معادلات بالا این است که طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق از بین برود.

$|2x-3|=|x-2| \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 4x + 4$
 $\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} x = 1, x = \frac{5}{3}$

تست معادله $|2x-3| = \left| \frac{1}{x-2} \right|$ چند جواب طبیعی دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱) با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$|2x-3| = \left| \frac{1}{x-2} \right| \Rightarrow \begin{cases} 2x-3 = \frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=\frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \times \end{cases} \\ 2x-3 = -\frac{1}{x-2} \Rightarrow 2x^2 - 7x + 7 = 0 \\ \Delta < 0 \\ \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$

نکاتی برای حل معادلات قدرمطلق

در معادلاتی که، برخی عبارات شامل x درون قدرمطلق و برخی بیرون قدرمطلق هستند با معادله از مجموع یا تفاضل چند قدرمطلق تشکیل شده است، بهترین راهکار این است که عبارت داخل قدرمطلق را به ازای ریشه داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم تا قدرمطلق حذف شود.

$x|x-1|=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1: x(x-1) = x+2 \Rightarrow x^2 - x = x+2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{cases} \\ x < 1: x(1-x) = x+2 \\ \Rightarrow -x^2 + x = x+2 \\ \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \end{cases}$

توجه کنید جواب $x=1-\sqrt{3}$ در شرط $x \geq 1$ صدق نمی‌کند.

درس
نهم

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

نامساوی مثلث، معادلات قدرمطلق و روش هندسی حل معادلات

- تذکره ۵۴۴. معادله $|2x+5|=|x-1|+|3x+4|$ چند جواب صحیح دارد؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- تذکره ۵۴۵. کدام نامعادله نشان دهنده تقاطعی از محور اعداد حقیقی است که در بازه $[-3, 5]$ قرار دارند؟
 ۱) $|x-1| \leq 4$ ۲) $|x-4| \leq 1$ ۳) $|x-1| \geq 4$ ۴) $|x-4| \geq 1$
- تذکره ۵۴۶. معادله $|3x-1|=x-3$ چند جواب دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار
- تذکره ۵۴۷. معادله $|2x-3|=\frac{1}{x-2}$ چند جواب طبیعی دارد؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- تذکره ۵۴۸. معادله $||x-2|-2|=4$ چند جواب صحیح دارد؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- تذکره ۵۴۹. معادله $\frac{y-x}{x-3}=1$ چند جواب صحیح دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۰. مجموع جواب‌های معادله $|2x-1|+|x+2|=3$ کدام است؟
 ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$
- تذکره ۵۵۱. نمودار تابع $f(x)=|x-1|+|2x+4|-4$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
 ۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم
- تذکره ۵۵۲. معادله $x^3+x-1=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۳. معادله $x \sin x - 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند ریشه حقیقی دارد؟
 ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵
- تذکره ۵۵۴. معادله $|x^2-1|=x$ چند جواب مثبت دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۵. معادله $x\sqrt{x}=1$ چند جواب دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۶. معادله $x^2 - \sqrt{x^2} = x + 6$ چند ریشه مثبت دارد؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر
- تذکره ۵۵۷. تعداد جواب‌های معادله $|\frac{\sin \pi x}{2x}|=1$ کدام است؟
 ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۸. معادله $x \log_2 x = 1$ چند جواب دارد؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳
- تذکره ۵۵۹. معادله $(\frac{1}{5})^{x-x^2} = |\cos x|$ چند جواب دارد؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر
- تذکره ۵۶۰. تعداد جواب‌های معادله $x2^x = 2x+1$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر
- تذکره ۵۶۱. تعداد جواب‌های معادله $\cos^2 x = x$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- تذکره ۵۶۲. تعداد جواب‌های معادله $\log_2(1-\sin x) = x+1$ در بازه $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
- تذکره ۵۶۳. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{1+\sin x - x}$ شامل چند عدد حقیقی نمی‌باشد؟
 ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

خارج-۶۸

خارج-۶۴

۱۶۵۳. اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ چقدر است؟

- ۱) $\frac{12}{27}$ ۲) $\frac{13}{81}$ ۳) $\frac{17}{27}$ ۴) $\frac{17}{81}$

۱۶۵۵. اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ باشد، حاصل $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۱۶۵۶. اگر $\tan x + \cot x = -2$ و $3\pi < 2x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{5}\sqrt{6}$ ۲) $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$ ۳) $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{1}{5}\sqrt{6}$

۱۶۵۷. اگر $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x}$ باشد مقدار $f(34)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{17}{18}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{11}{18}$

توبت دوم - ۱۳۹۲

روابط مثلثاتی $\alpha + \beta$

۱۶۵۸. حاصل $\frac{\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶۵۹. حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۶۶۰. اگر انتهای کمان x در ربع اول و $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin(\frac{3\pi}{4} - 2x)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $-\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{7}{9}$

۱۶۶۱. از رابطه $\sin \delta x \cos 2x - \cos \delta x \sin 2x = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۱۶۶۲. اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $(\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \beta + \cos \alpha)^2$ کدام است؟

- ۱) $1 + \sqrt{3}$ ۲) $1 - \sqrt{3}$ ۳) $2 + \sqrt{3}$ ۴) $2 - \sqrt{3}$

۱۶۶۳. حاصل $\frac{\cos \delta^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin \delta^\circ}{\sin 15^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $5 \sin 15^\circ$ ۲) $4 \sin 20^\circ$ ۳) $\sqrt{2} \cos 5^\circ$ ۴) $\sqrt{2} \cos 15^\circ$

۱۶۶۴. اگر $\tan x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cos 2x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\cos x}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{7}{5}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

۱۶۶۵. حاصل $\sin 10^\circ \sin 55^\circ + \sin 80^\circ \sin 25^\circ$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۳) $\frac{4-\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

۱۶۶۶. ساده شده عبارت $\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$ کدام است؟

- ۱) $-\tan \alpha$ ۲) $\cot \alpha$ ۳) $-\tan \beta$ ۴) $\cot \beta$

۱۶۶۷. اگر $\alpha = \frac{\pi}{6} + \beta$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۶۶۸. اگر $\tan \alpha = \frac{7}{4}$ و $\tan \beta = \frac{1}{6}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{65}$ ۲) ۲۱ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) ۲۹

داخل - ۹۴

خارج - ۹۷

سوال ۱۹۶۹. اگر $\tan x = \sqrt{2}$ و انتهای کمان x در ربع سوم باشد مقدار $\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $-\sqrt{2}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ $-\sqrt{3}$

ریاضی داخل - ۹۹

سوال ۱۹۷۰. اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{4}{5}$ ۲ $-\frac{3}{5}$ ۳ $\frac{3}{5}$ ۴ $\frac{4}{5}$

ریاضی خارج - ۹۹

سوال ۱۹۷۱. اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{4}$ باشد مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{4}{5}$ ۲ $-\frac{3}{5}$ ۳ $\frac{3}{5}$ ۴ $\frac{4}{5}$

سوال ۱۹۷۲. اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{6}$ ۲ $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$ ۳ $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$ ۴ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

سوال ۱۹۷۳. اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{4}{3}$ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{1}{3}$

سوال ۱۹۷۴. اگر $\frac{\delta}{\pi} = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$ باشد آنگاه حاصل $\cos(2x - 2y)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{7}{8}$ ۲ $-\frac{5}{8}$ ۳ $-\frac{3}{11}$ ۴ $-\frac{2}{5}$

خارج - ۹۹

سوال ۱۹۷۵. اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{2}{3}$

داخل - ۹۹

سوال ۱۹۷۶. اگر $\frac{2}{3} = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{9}$ ۲ $-\frac{1}{9}$ ۳ $\frac{1}{9}$ ۴ $\frac{2}{9}$

داخل - ۹۹

سوال ۱۹۷۷. اگر $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$ باشد $\tan x$ کدام است؟

- ۱ -2 ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ 2

سوال ۱۹۷۸. اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد حاصل $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\theta) + \cos(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3 - 25\sqrt{2}}{50}$ ۲ $\frac{8 - 2\sqrt{3}}{50}$ ۳ $\frac{31\sqrt{2} - 48}{50}$ ۴ $\frac{20\sqrt{3} + 1}{50}$

سوال ۱۹۷۹. اگر $\frac{1}{4} = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ باشد حاصل $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{2}{5}$ ۴ $\frac{1}{3}$

سوال ۱۹۸۰. حاصل عبارت $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 3 ۴ 4

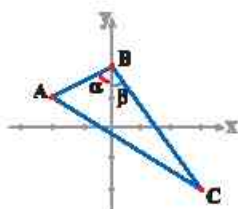
ریاضی داخل - ۱۳۰

سوال ۱۹۸۱. اندازه زاویه A در مثلث ABC ، 45° درجه بیشتر از اندازه زاویه B است. حاصل $2 \cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال ۱۹۸۲. نقاط $A(-2, 1), B(0, 2), C(3, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ۳ $\frac{11}{5\sqrt{5}}$ ۴ $\frac{5}{3\sqrt{5}}$



۱۶۸۳ اگر $\sin 3\theta = a \sin^3 \theta + b \sin \theta$ باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ -۸ ۳ ۱۲ ۴ -۱۲

۱۶۸۴ اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ باشد، آنگاه مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{9}{16}$ ۲ $-\frac{9}{16}$ ۳ $\frac{7}{9}$ ۴ $-\frac{7}{9}$

تاریخ - ۱۴۰۰

۱۶۸۵ اگر $f(x) = 4 \sin x \cos 2x + 2 \sin x$ باشد، مقدار $f(\frac{7\pi}{9})$ کدام است؟

- ۱ $-\sqrt{3}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ ۱ ۴ -۱

۱۶۸۶ اگر $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد، $\frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta}$ چقدر است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ۲ $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ ۳ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ۴ $-\frac{\sqrt{6}}{7}$

۱۶۸۷ اگر $\tan(\frac{\pi}{8} + \alpha) = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{8} - \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $-\frac{1}{5}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $-\frac{1}{3}$

۱۶۸۸ مقدار $\frac{1 - \tan 10^\circ}{1 + \tan 10^\circ}$ کدام است؟

- ۱ $\tan 25^\circ$ ۲ $\tan 40^\circ$ ۳ $\cot 40^\circ$ ۴ $\cot 25^\circ$

۱۶۸۹ اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{2}$

تاریخ - ۱۳

۱۶۹۰ اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ -۲ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ ۳

۱۶۹۱ اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{8}$ ۲ $\frac{2}{4}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{6}$

۱۶۹۲ اگر $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 2$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ۳ $\frac{3}{5}$ ۴ $\frac{5}{8}$

۱۶۹۳ اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{11}{17}$ ۲ $-\frac{11}{17}$ ۳ $\frac{7}{17}$ ۴ $-\frac{7}{17}$

۱۶۹۴ اگر $\frac{\sin(25^\circ + \alpha) - \cos(25^\circ + \alpha)}{\sin(25^\circ + \alpha) + \cos(25^\circ + \alpha)} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan(20^\circ + \alpha)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{7 - 2\sqrt{3}}{11}$ ۲ $\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}$ ۳ $\frac{7 + 2\sqrt{3}}{11}$ ۴ $\frac{5\sqrt{3} - 8}{11}$

۱۶۹۵ اگر $1 + \tan 25^\circ \tan x = 2(\tan x - \tan 25^\circ)$ باشد، آنگاه حاصل $\tan(x + 20^\circ)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ ۲ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴ ۳

۱۶۹۶ اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{9}{13}$ ۲ $\frac{9}{13}$ ۳ $\frac{2}{8}$ ۴ $\frac{2}{8}$

۱۶۹۷ اگر $\tan(x + y) = 5$ و $\tan y = 2$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- ۱ $\frac{15}{56}$ ۲ $\frac{33}{56}$ ۳ $\frac{19}{28}$ ۴ $\frac{17}{28}$



حسابان جامع کنکور • فصل هشتم

زنگنه ۱۶۹۸. اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ و $\sin x = -\frac{1}{4}$ و همچنین $0 < y < \frac{\pi}{2}$ و $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{9+5\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\frac{9-5\sqrt{2}}{2}$ ۳ $\frac{7+5\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\frac{7-5\sqrt{2}}{2}$

زنگنه ۱۶۹۹. اگر $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ باشد مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- ۱ $\frac{5-2\sqrt{2}}{3}$ ۲ $\frac{6-5\sqrt{2}}{3}$ ۳ $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ ۴ $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

زنگنه ۱۷۰۰. اگر $\tan(\alpha + \beta) = 4$ و $\tan(2\alpha + \beta) = 2$ باشد مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{26}{85}$ ۲ $-\frac{19}{29}$ ۳ $\frac{23}{52}$ ۴ $\frac{18}{43}$

زنگنه ۱۷۰۱. اگر $\tan(x+2y) = 2$ و $\tan(2x-2y) = 4$ باشد حاصل $\cot 2x$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{5}{11}$ ۲ $-\frac{7}{6}$ ۳ $\frac{2}{2\sqrt{2}}$ ۴ $-\frac{2}{5\sqrt{2}}$

زنگنه ۱۷۰۲. اگر $\sin(x+y) = 6\cos x \cos y$ و $\tan x \tan y = 3$ باشد، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

- ۱ $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۲ -3 ۳ $-2\sqrt{2}$ ۴ $-1 - \sqrt{3}$

ریاضی داخل - ۹۹

زنگنه ۱۷۰۳. اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- ۱ 1 ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ -3 ۴ -1

زنگنه ۱۷۰۴. اگر $\cot \alpha$ و $\cot \beta$ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشد، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{2}{5}$ ۳ $\frac{2}{4}$ ۴ $\frac{4}{7}$

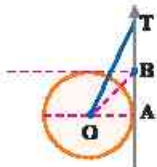
زنگنه ۱۷۰۵. اگر $\tan x_1$ و $\tan x_2$ ریشه‌های معادله $\tan^2 x - 2k \tan x + k - 1 = 0$ باشند و $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{p}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ -1 ۴ -2

ریاضی خارج - ۹۹

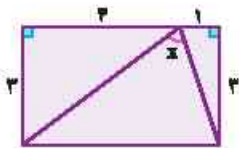
زنگنه ۱۷۰۶. با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر $BT = 2$ باشد، مقدار $\tan(\angle TOB)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{2}{3}$



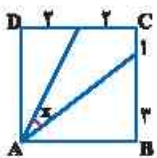
زنگنه ۱۷۰۷. در مستطیل شکل مقابل، مقدار $\sin x$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ۲ $\frac{5}{\sqrt{10}}$ ۳ $\frac{7}{\sqrt{10}}$ ۴ $\frac{3}{\sqrt{10}}$



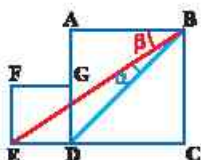
زنگنه ۱۷۰۸. در مربع مقابل، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{2}{5}$



زنگنه ۱۷۰۹. در شکل مقابل چهارضلعی‌های ABCD و FGDE مربع هستند و $\tan \beta = \frac{2}{3}$ است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{1}{6}$



چند مسئله ترکیبی

۲۳۲۵. اگر $f'(3) = 5$ و $g(-1) = 2$ باشد مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

- ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۳۲۶. اگر تابعی درجه دوم باشد و $f(x) - f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$ باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) $1/5$ ۴) ۲

۲۳۲۷. تابع f مشتق پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{2}{3}$ و $g(x) = f(x+1) + f(3x+1)$ باشد حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{12}{7}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۶

ریاضی داخل - ۱۳۰۱

۲۳۲۸. نمودار تابع مشتق پذیر نسبت به محور y متقارن است. اگر $f(1) = 2f'(1) = 3$ باشد مشتق تابع $xf(x)$ در $x = -1$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۲۹. اگر $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $x \leq 1$ باشد شیب خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه تلاقی آن با محور x ها کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

عامل صفرشونده و ساده‌سازی

در این بخش چند روش میانبر برای مشتق گرفتن با هم یاد می‌گیریم. یکی از مهم‌ترین آن‌ها، توجه به عامل صفرشونده است.

۲۳۳۰. مشتق تابع $f(x) = (x^2 - 2)(x - 4)(x^2 - 6)(x - 8)$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

- ۱) ۲۸۰ ۲) ۵۶۰ ۳) -۲۸۰ ۴) -۵۶۰

۲۳۳۱. اگر $f(x) = (x^2 - 2x)(x^3 - x^2 - 2)$ باشد $f'(2)$ کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۲۳۳۲. اگر $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{6x-2}}$ باشد مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۳۳۳. اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

- ۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۲۳۳۴. مشتق تابع $f(x) = (x+1)(x^2-1)\sqrt{x^2-2x+1}$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۳۳۵. اگر $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+1}}$ باشد حاصل $f'(1) \times f'(4)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲۳۳۶. اگر $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{2 + \log_2 x}$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h}$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۳۳۷. مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x^2 - 2x + 4}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- ۱) $1/5$ ۲) $0/75$ ۳) ۱ ۴) $1/5$

۲۳۳۸. مشتق تابع $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳۹. مشتق تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{8}$

داخل - ۹۳



۲۳۳۰. مشتق تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) 1 ۴) -1
۲۳۳۱. اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-2)} + x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{6}$
۲۳۳۲. اگر $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{1-\sqrt{x}}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h}$ کدام است؟
 ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$
۲۳۳۳. اگر $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{-5}{x-2}$ ، حاصل $f'(x) + g'(x)$ کدام است؟
 ۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2
۲۳۳۴. اگر $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x}$ باشد، حاصل $f'(A)g(A) + g'(A)f(A)$ کدام است؟
 ۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{3}{5}$
۲۳۳۵. اگر $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - x})^3$ و $g(x) = (x - \sqrt{x^2 - x})^3$ باشد، حاصل $f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$ چقدر است؟
 ۱) -12 ۲) 12 ۳) -8 ۴) 8
۲۳۳۶. اگر $f(x) = \frac{2x+6}{\sqrt{x+1}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ باشد، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟
 ۱) 12 ۲) -12 ۳) 4 ۴) -4
۲۳۳۷. اگر $f(x) = \sqrt{2x^2+x} + x$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+x-x}}$ باشد، حاصل $f'(2)g(2) - g'(2)f(2)$ کدام است؟
 ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

مشتق مرتبه دوم

دو بار از تابع مشتق بگیریم!

۲۳۳۸. در تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 6x$ اگر $f'(-1) = 2$ و $f''(1) = 10$ باشد، مقدار b کدام است؟
 ۱) 1 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 4
۲۳۳۹. اگر $f(x) = \sqrt{2x-2}$ باشد، $f''(2)$ کدام است؟
 ۱) $-\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $-\frac{9}{22}$ ۴) $\frac{9}{22}$
۲۳۴۰. مشتق دوم تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$
۲۳۴۱. اگر $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ ، مقدار $f''(-2)$ کدام است؟
 ۱) 12 ۲) -12 ۳) 8 ۴) -8
۲۳۴۲. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x+1}$ اگر $f''(1) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار a کدام است؟
 ۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۲۳۵۴. اگر $g'(1) = f'(1) = 2$ و $f(x) = x^2 + g(x^2)$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۲۳۵۵. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} = x - \frac{2}{x}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟

- ۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲۳۵۶. اگر $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-1+h) - f'(-1)}{h}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) 2 ۴) $\frac{3}{4}$

مشتق تابع مرکب (۱)

تست‌های این بخش رو با فرموله و دقت حل کنید. معمولاً یک تست در کلگور ظاهر!

۲۳۵۷. اگر $f(\delta) = f'(\delta) = -2$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{2x+3} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ f)'(\delta)$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۲۳۵۸. اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ باشد، $(f \circ f)'(1)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) 1

۲۳۵۹. اگر $g(x) = \sqrt{2x+1}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$ باشد، $(f \circ g)'(4)$ کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 2 ۳) 6 ۴) 8

۲۳۶۰. اگر $f(x) = \frac{1}{x+1}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - f'(2)}{h}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $-\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{32}$

۲۳۶۱. اگر $f(x) = \sqrt{3x-7}$ و $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $g \circ f$ به ازای $x=2$ کدام است؟

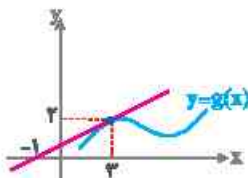
- ۱) 3 ۲) 6 ۳) 8 ۴) 12

۲۳۶۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشد، $(g \circ f)'(2)$ کدام است؟

- ۱) 12 ۲) 6 ۳) 18 ۴) 20

۲۳۶۳. نمودار تابع g و خط مماس بر آن در $x=3$ به صورت مقابل است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 6



۲۳۶۴. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل و $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ باشد، مقدار $(f \circ g)'(4)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{5}{7}$

- ۳) $\frac{1}{28}$ ۴) $\frac{5}{28}$

۲۳۶۵. خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x-2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4



داخل - ۹۸

۲۳۶۵. اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟
 ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳
۲۳۶۶. اگر $f(x) = \sqrt{5x-9}$ و $g(x) = x^2 + ax$ باشد به ازای کدام مقدار a رابطه $(gof)'(2) = 10$ برقرار است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲
۲۳۶۷. اگر $f'(3) = 1$ و $f(3) = 1$ باشد، مقدار مشتق تابع $y = \sqrt{f(x)} + \frac{2}{f(x)}$ در $x=3$ کدام است؟
 ۱) ۴ ۲) -۳۱ ۳) ۲۷ ۴) -۱۱
۲۳۶۸. اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد، مشتق تابع $y = f(x-f(x))$ در $x=1$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۲۳۶۹. اگر $f(x) = \frac{2}{y} - \sqrt{x+2}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x=2$ کدام است؟
 ۱) -۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱
۲۳۷۰. اگر $f(0) = f'(0) = 1$ و $f(x) = g(x^2 - f(x))$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۳
۲۳۷۱. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{2}{5}$ باشد، مقدار مشتق تابع $y = f(x^2 + 2x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) -۴
۲۳۷۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 8$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{1-3x})$ در $x=-1$ کدام است؟
 ۱) -۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) -۳
۲۳۷۳. اگر $f(x^2 + 1) = 2x^3 - 2x^2 + 5$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۲۳۷۴. اگر $f(\sqrt{x}) = x^2 - 2x$ باشد، مشتق تابع $f(\frac{1}{x})$ در $x=2$ کدام است؟
 ۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$
۲۳۷۵. اگر مشتق تابع $f(\sqrt[3]{3x+2})$ در $x=2$ برابر $\frac{1}{3}$ باشد، مشتق $f(x+x^2)$ در $x=1$ کدام است؟
 ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) ۴
۲۳۷۶. اگر f یک تابع مشتق پذیر و $g(x) = f(\sqrt[3]{6x+2})$ و $g'(1) = -2$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۴
۲۳۷۷. اگر $f''(x) + f(x) = x$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲
۲۳۷۸. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 8}{x - 3} = 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + f(3x)}$ باشد، مقدار $g'(1)$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) ۲
۲۳۷۹. اگر $f(2x) + g(\sqrt{x}) = \frac{1}{x}$ و $g'(1) = -10$ باشد، حاصل $f'(2)$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴
۲۳۸۰. اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، حاصل $g'(x) \cdot f'(g(x))$ کدام است؟
 ۱) $\frac{2}{x}$ ۲) $\frac{2}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-2}{x^2}$

۲۳۸۱. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}x$ ۴

x ۳

1 ۲

-1 ۱

۲۳۸۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} = 4$ باشد، مشتق تابع $f(x) + g(2-x)$ در $x=1$ کدام است؟

-4 ۴

4 ۳

-2 ۲

2 ۱

۲۳۸۳. اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشند، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

-6 ۴

5 ۳

$-\frac{2}{3}$ ۲

$-\frac{3}{2}$ ۱

۲۳۸۴. اگر $f(2x) + f(2-x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

8 ۴

-10 ۳

2 ۲

-2 ۱

۲۳۸۵. اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x}; & x \geq 0 \\ x^2-2; & x < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ f)'(2)$ کدام است؟

4 ۴

3 ۳

2 ۲

1 ۱

مشتق تابع مرکب (۳)

۲۳۸۶. مشتق تابع $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^5$ در $x=1$ کدام است؟

5^5 ۴

5^4 ۳

5^3 ۲

5^2 ۱

۲۳۸۷. اگر $f(x) = (x + \frac{2}{x})^2$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

-45 ۴

-26 ۳

-27 ۲

-18 ۱

۲۳۸۸. اگر $f(x) = \frac{x^2+1}{(2x-3)^2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

-20 ۴

-16 ۳

-12 ۲

-8 ۱

۲۳۸۹. مشتق تابع $f(x) = (\frac{2x+1}{x^2+1})^2$ در $x=1$ کدام است؟

-16 ۴

-8 ۳

16 ۲

8 ۱

۲۳۹۰. مشتق تابع $f(x) = (x^2 - \sqrt{x+2})^3$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

62 ۴

48 ۳

22 ۲

20 ۱

۲۳۹۱. اگر تابع f در $x=2$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+7}{x-2} = -\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟

$\frac{2}{9}$ ۴

$\frac{1}{7}$ ۳

$\frac{1}{6}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

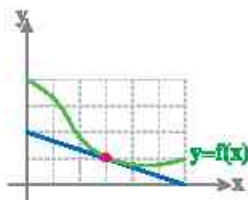
۲۳۹۲. تابع f در $x=2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-9}{h} = \frac{3}{4}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

4 ۴

$2/5$ ۳

3 ۲

$2/5$ ۱



۲۳۹۳. نمودار تابع f به صورت مقابل است. مشتق تابع $y = \sqrt{f(x)}$ در $x=3$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ ۲

$\frac{2}{3}$ ۱

$-\frac{1}{6}$ ۴

$\frac{1}{6}$ ۳

۲۳۹۴. اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ باشد، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۴

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳

$\frac{1}{3}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱

۲۳۹۵. اگر $f'(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{5+x^2}}$ باشد، مشتق تابع $f(\frac{1}{\sqrt{x}})$ در $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ ۴

$\frac{1}{4}$ ۳

-4 ۲

4 ۱



داخل - ۹۵

۲۳۹۶. در تابع با ضابطه $f(x) = (\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

- ۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

داخل - ۹۶

۲۳۹۷. اگر $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

خارج - ۹۸

۲۳۹۸. مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x+2}{2x-3}\right)^2}$ به ازای $x=2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $-\frac{12}{3}$ ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

داخل - ۹۹

۲۳۹۹. مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x=-2$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۰۰. مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+2}}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۴۰۱. اگر $f(x) = \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+1}}\right)^3$ باشد، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{11}{2}$ ۲) $-\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{16}{5}$

۲۴۰۲. مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

مشتق توابع مثلثاتی

۲۴۰۳. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-2h)}{2h} = 2 \cos x$ ، آنگاه $f'(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

داخل - ۹۸

۲۴۰۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x}$ کدام است؟

- ۱) $-\sin a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $\cos a$ ۴) $\sin a$

۲۴۰۵. مشتق تابع $y = \cos^2 2x$ در $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- ۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۲۴۰۶. مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{\sin(\frac{\pi}{x})}$ در $x = \frac{2}{\pi}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2\sqrt{3}-2\pi}{2}$ ۲) $\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{2}$ ۳) $\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$ ۴) $\frac{6\sqrt{3}+2\pi}{2}$

خارج - ۹۰

۲۴۰۷. مقدار مشتق تابع $f(x) = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x=2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{96}$ ۲) $\frac{\pi}{22}$ ۳) $\frac{\pi}{48}$ ۴) $\frac{\pi}{32}$

۲۴۰۸. مقدار مشتق تابع $y = \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{2}$

۲۴۰۹. مشتق تابع $f(x) = 2\sqrt{x} \sin(\pi\sqrt{x})$ در $x = \frac{1}{16}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi + \pi)$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi - \pi)$ ۳) $\sqrt{2}(\pi + \pi)$ ۴) $\sqrt{2}(\pi - \pi)$

۲۳۱۰. مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2} - 1$ ۲) $2\sqrt{2} - 4$ ۳) $2\sqrt{2} + 1$ ۴) $4\sqrt{2}$

خارج - ۹۳

۲۳۱۱. مشتق $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{9}{8\pi}$ ۲) $\frac{9}{4\pi}$ ۳) $\frac{27}{8\pi}$ ۴) $\frac{27}{4\pi}$

۲۳۱۲. مشتق تابع $f(x) = \sin^2 \pi(x + \sqrt{x})$ در $x = \frac{1}{9}$ کدام است؟

- ۱) π ۲) 2π ۳) $-\pi$ ۴) -2π

۲۳۱۳. اگر $f(x) = \cos^2(\frac{\pi}{4} \sin x)$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$ کدام است؟

- ۱) $\pi\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ ۳) $-\pi\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

۲۳۱۴. خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \cos^2 x + \cos x$ در بازه $(0, 2\pi)$ در چند نقطه موازی محور x ها است؟

- ۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳۱۵. مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\right)^2$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- ۱) -4 ۲) 16 ۳) -8 ۴) ۲

خارج - ۹۷

۲۳۱۶. مشتق عبارت $\tan^2 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۷۲

۲۳۱۷. مشتق تابع $f(x) = \tan^2(\frac{\pi}{4} \sin \pi x)$ در $x = \frac{1}{9}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2\pi^2}{3}$ ۲) $\frac{4\pi^2}{9}$ ۳) $-\frac{2\pi^2}{3}$ ۴) $-\frac{4\pi^2}{9}$

۲۳۱۸. اگر $g(x) = f(\sin x)$ و $f'(1) = 3$ باشد آنگاه $g'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- ۱) -3 ۲) -15 ۳) ۳ ۴) 15

۲۳۱۹. اگر $f(x) = \sqrt{2 \sin \pi x}$ آنگاه $f'(\frac{1}{\sqrt{e}})$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\pi\sqrt{2}$ ۴) $\pi\sqrt{3}$

۲۳۲۰. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{3 + \tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

۲۳۲۱. مقدار مشتق عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ به ازای $x = \frac{2}{\pi}$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ ۲) $-\frac{2\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{2\pi^2}{9}$ ۴) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

۲۳۲۲. اندازه مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \cos \frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۳۲۳. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\sqrt{y} \cos \pi x}$ به ازای $x = \frac{1}{y}$ چه مقدار است؟

- ۱) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ ۲) $-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $-\frac{\pi}{3}$

۲۳۲۴. مقدار مشتق $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

خارج - ۹۱



حال می‌خواهیم ببینیم t_n به ازای چه مقدار n برابر صفر می‌شود، پس:

$$-3n + 132 = 0 \Rightarrow 3n = 132 \Rightarrow n = 44$$

۱۳۲

جمله اول دنباله حسابی داده شده برابر ۶- و قدرنسبت آن برابر ۳ است. پس

جمله عمومی این دنباله حسابی برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -6 + (n-1)(3) = 3n - 10$$

حال می‌خواهیم ببینیم ۶۲ چندمین جمله این دنباله است، پس:

$$t_n = 62 \Rightarrow 3n - 10 = 62 \Rightarrow 3n = 72 \Rightarrow n = 24$$

پس این دنباله دارای ۱۸ جمله است.

۱۳۳

جمله اول دنباله حسابی ...، ۶۰، ۶۷، ۷۴، برابر ۷۴ و قدرنسبت آن ۷- است.

پس جمله عمومی این دنباله برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 74 + (n-1)(-7) = -7n + 81$$

حال برای این که مشخص کنیم چند جمله این دنباله نامنفی است، باید

جمله عمومی را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم، پس داریم:

$$t_n \geq 0 \Rightarrow -7n + 81 \geq 0 \Rightarrow 7n \leq 81 \Rightarrow n \leq \frac{81}{7} \Rightarrow n \leq 11.57 \dots$$

بنابراین مقادیر ۱، ۲، ...، ۱۱ قابل قبول هستند یعنی دنباله دارای ۱۱

جمله نامنفی است.

۱۳۴

با توجه به این که جمله اول دنباله برابر ۳- و جمله چهارم آن برابر ۹ است،

قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{t_4 - t_1}{4 - 1} = \frac{9 - (-3)}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

بنابراین جمله هشتم برابر است با:

$$t_8 = t_1 + 7d \Rightarrow t_8 = -3 + 7(4) = 25$$

۱۳۵

قدرنسبت برابر است با:

$$d = \frac{t_{11} - t_7}{11 - 7} = \frac{43 - 15}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

حال از آن جایی که جمله هفتم برابر ۱۵ است، پس:

$$t_7 = t_1 + 6d \Rightarrow 15 = t_1 + (6 \times 7) \Rightarrow t_1 = 15 - 42 = -27$$

بنابراین جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -27 + (n-1)(7) \Rightarrow t_n = 7n - 34$$

حال باید مشخص کنیم به ازای کدام مقدار n بزرگ‌ترین جمله دورقمی

به دست می‌آید:

$$t_n < 100 \Rightarrow 7n - 34 < 100 \Rightarrow 7n < 134 \Rightarrow n < 19.14 \dots$$

چون n نشان‌دهنده شماره جمله‌ها است، پس بزرگ‌ترین مقدار قابل قبول

$n = 19$ می‌باشد، یعنی جمله نوزدهم بزرگ‌ترین جمله دورقمی این دنباله است.

۱۳۶

$$t_p = -t_q \Rightarrow t_p + t_q = 0 \Rightarrow (t_1 + d) + (t_1 + qd) = 0 \Rightarrow 2t_1 + (p+q)d = 0$$

$$2t_1 + (p+q)d = 0$$

از طرفی جمله نهم برابر ۱۲ است، پس:

$$\begin{cases} t_1 + 8d = 12 \\ t_1 + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3$$

۱۳۷

با استفاده از اتحاد مزدوج، رابطه داده شده در صورت سؤال را باز می‌کنیم:

$$t_p^2 - t_q^2 = 48 \Rightarrow (t_p - t_q)(t_p + t_q) = 48 \Rightarrow 2d \times p = 48 \Rightarrow d = 4$$

چون آخرین عدد هر دسته مربع کامل است، پس عدد آخر دسته نهم برابر

$$9^2 = 81 \text{ و عدد آخر دسته هشتم } 8^2 = 64 \text{ است. بنابراین عدد اول دسته نهم}$$

برابر $65 = 64 + 1$ است، پس واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر دسته

نهم برابر است با:

$$\frac{65 + 81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

۱۳۵

اعداد طبیعی فرد به طریقی دسته‌بندی شده‌اند که تعداد جملات هر

دسته برابر شماره آن دسته باشد، پس جمله آخر در دسته چهارم برابر

$$4 \times 4 = 16 \text{ است. پس مجموع آن‌ها برابر است با: } 1 + 2 + \dots + 16 = \frac{16(16+1)}{2} = 136$$

بنابراین ۸۲۰ امین عدد فرد را می‌خواهیم که برابر است با:

$$820 = 2n - 1 \Rightarrow 2n = 821 \Rightarrow n = 410.5 \Rightarrow n = 411$$

۱۳۶

آخرین جمله هر دسته مربع کامل است، پس آخرین جمله دسته نهم برابر $9^2 = 81$

و آخرین جمله دسته دهم برابر $10^2 = 100$ است. پس دسته دهم شامل ۱۹ عدد

طبیعی به صورت $(100, 99, \dots, 82, 81)$ است که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$82 + 83 + \dots + 100 = (1 + 2 + \dots + 100) - (1 + 2 + \dots + 81)$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} - \frac{81 \times 82}{2} = 1729$$

۱۳۷

چون اولین عدد هر دسته مربع کامل است، پس عدد اول دسته دهم برابر

$10^2 = 100$ و عدد اول دسته یازدهم $13^2 = 169$ است. بنابراین پنج جمله آخر

دسته دهم $100, 101, 102, 103, 104$ هستند و میانگین آن‌ها برابر 118 است.

۱۳۸

به جز دسته اول و دوم، اعداد آخر هر دسته تشکیل دنباله هندسی با

قدرنسبت ۲ می‌دهند، یعنی $6, 12, 24, 48, \dots$ پس عدد آخر دسته n ام از

رابطه $6 \times 2^{n-2} = 3072$ به دست می‌آید. حال چون عدد آخر دسته دوازدهم برابر

$$6 \times 2^{12-2} = 3072 \text{ است، پس عدد اول دسته سیزدهم برابر با } 3072 + 1 = 3073 \text{ و}$$

عدد آخر دسته سیزدهم برابر با $6 \times 2^{13-2} = 6144$ است. چون اعضای هر دسته،

اعداد طبیعی متوالی‌اند، پس میانگین اعداد دسته سیزدهم برابر است با:

$$\frac{3073 + 6144}{2} = 4608.5$$

۱۳۹

$$a_9 - a_8 = 5d \Rightarrow 5 - 8 = 5d \Rightarrow d = -\frac{3}{5}$$

$$a_{16} = a_9 + 7d = 5 + 7 \left(-\frac{3}{5}\right) = 5 - \frac{21}{5} = \frac{4}{5}$$

۱۴۰

دنباله $2, 4, 8, \dots$ یک دنباله حسابی با جمله اول ۲- و قدرنسبت ۴

است. بنابراین جمله عمومی دنباله برابر $t_n = -2 + (n-1) \times 4 = 4n - 8$

است. حال به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

$$t_n = 4n - 8 = 125 \Rightarrow 4n = 133 \Rightarrow n = \frac{133}{4}$$

$$t_n = 4n - 8 = 145 \Rightarrow 4n = 153 \Rightarrow n = \frac{153}{4}$$

$$t_n = 4n - 8 = 148 \Rightarrow 4n = 156 \Rightarrow n = 39$$

۱۴۱

دنباله داده شده یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۲۹ و قدرنسبت ۲- است.

پس جمله عمومی آن برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 129 + (n-1)(-2) \Rightarrow t_n = -2n + 131$$



پاسخ نامه تشریحی فصل اول

۱۵۴

با فرض این که جمله اول این دنباله حسابی برابر t_1 و قدرنسبت آن برابر d

باشد، جمله یازدهم برابر است با:

$$t_{11} = t_1 + 10d$$

حال اگر از قدرنسبت این دنباله $\frac{3}{4}$ کم کنیم، خواهیم داشت:

$$t_{11} = t_1 + 10(d - \frac{3}{4}) = t_1 + 10d - 15$$

۱۵۵

رابطه داده شده را ساده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{t_8}{t_6} = 2 \Rightarrow \frac{t_1 + 7d}{t_1 + 5d} = 2 \Rightarrow t_1 + 7d = 2t_1 + 10d \Rightarrow -2t_1 = 3d \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{2}d$$

حال با قرار دادن $-\frac{3}{2}d$ به جای t_1 ، جمله‌های 12 ام و 17 ام را برحسب d می‌نویسیم و داریم:

$$\frac{t_{17}}{t_7} = \frac{t_1 + 16d}{t_1 + 6d} = \frac{-\frac{3}{2}d + 16d}{-\frac{3}{2}d + 6d} = \frac{17d}{\frac{9}{2}d} = \frac{17}{9}$$

۱۵۶

قدرنسبت این دنباله حسابی برابر $d = 6 - 3 = 3$ می‌باشد. پس جمله سوم

آن برابر 9 و جمله چهارم آن برابر 12 است:

$$7 + y = 9 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 12 \Rightarrow x + 2(2) = 12 \Rightarrow x = 8$$

برای به دست آوردن t_8 داریم:

$$t_8 = t_1 + 7d \Rightarrow t_8 = 3 + 7(3) = 24$$

۱۵۷

با توجه به جمله‌های داده شده داریم:

$$1) t_1 = t_1 + d \Rightarrow 2x - 1 = x + 1 + d \Rightarrow x = d + 2$$

$$2) t_6 = t_1 + 5d \Rightarrow 4x = x + 1 + 5d \Rightarrow 3d = 3x - 1$$

با جایگذاری معادله به دست آمده از ۱ در ۲ داریم:

$$3d = 3(d + 2) - 1 \Rightarrow d = 5$$

۱۵۸

قدرنسبت دنباله حسابی $\dots, 8, 5, 2$ برابر 3 است. چون جملات $\dots, t_4, t_8, t_{12}, \dots$ نیز دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند، پس قدرنسبت

برابر است با:

$$d' = t_8 - t_4 = (t_1 + 7d) - (t_1 + d) = 6d = 6(3) = 18$$

۱۵۹

اعداد طبیعی سه رقمی با یکان 6 به صورت $106, 116, 126, \dots, 996$ هستند که یک دنباله حسابی با جمله اول 106 و قدرنسبت 10 می‌سازند. حال می‌خواهیم مشخص کنیم جمله چندم این دنباله برابر 996 است. پس ابتدا جمله عمومی را به دست می‌آوریم و آن را برابر 996 می‌گذاریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 106 + (n-1)(10) \Rightarrow n - 1 = 89 \Rightarrow n = 90$$

$$89 = (n-1)(10)$$

بنابراین 90 عدد طبیعی سه رقمی با یکان 6 وجود دارد.

۱۶۰

اعداد دو رقمی مضرب 6 به صورت $12, 18, 24, \dots, 96$ هستند که یک دنباله حسابی با جمله اول 12 و قدرنسبت 6 می‌سازند. حال برای مشخص کردن تعداد اعداد دو رقمی مضرب 6 جمله عمومی را برابر 96 می‌گذاریم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)(6) \Rightarrow 6n - 6 = 84 \Rightarrow n = 15$$

$$6n - 6$$

پس 15 عدد طبیعی دو رقمی مضرب 6 وجود دارد.

۱۶۸

تفاضل جمله دهم از دوازدهم برابر 5 و مجموع آن‌ها برابر 28 است، پس:

$$1) t_{12} - t_{10} = 5 \Rightarrow 2d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{2}$$

$$2) t_7 + t_9 = 28 \Rightarrow (t_1 + 6d) + (t_1 + 8d) = 28 \Rightarrow 2t_1 + 14d = 28$$

$$\xrightarrow{d = \frac{5}{2}} 2t_1 + 2(\frac{5}{2}) = 28 \Rightarrow t_1 = \frac{25}{2}$$

بنابراین جمله بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$$t_{21} = t_1 + 20d \Rightarrow t_{21} = \frac{25}{2} + 20(\frac{5}{2}) = \frac{25}{2} + 50 = \frac{125}{2}$$

۱۶۹

مجموع سه جمله اول به صورت $t_1 + t_2 + t_3$ و مجموع چهار جمله بعدی به صورت $t_4 + t_5 + t_6 + t_7$ می‌باشد. با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی، همه جمله‌ها را باز می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 9 \Rightarrow 3t_1 + 3d = 9 \\ t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 26 \Rightarrow 4t_1 + 18d = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t_1 + 3d = 9 \\ 4t_1 + 18d = 26 \end{cases} \Rightarrow d = 1, t_1 = 2$$

بنابراین جمله دهم برابر است با:

$$t_{10} = t_1 + 9d = 2 + 9(1) = 11$$

۱۷۰

ابتدا با داشتن جمله اول و چهارم قدرنسبت را به دست می‌آوریم. در این دنباله جمله اول برابر 1 و جمله چهارم برابر 3 است. پس:

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow 3 = 1 + 3d \Rightarrow 2 = 3d \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

حال با استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی، جملات را باز می‌کنیم و داریم:

$$\frac{t_7}{t_3} = \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 2d} = \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 2d} = \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 2d}$$

$$\xrightarrow{t_1 = 1} \frac{1 + 6(\frac{2}{3})}{1 + 2(\frac{2}{3})} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{11}{7}$$

۱۷۱

در تساوی $t_1 + 2t_{10} = 63$ جمله دهم را با استفاده از جمله عمومی باز می‌کنیم و آن را برحسب t_1 و d می‌نویسیم:

$$t_1 + 2(t_1 + 9d) = 63 \Rightarrow 3t_1 + 18d = 63 \xrightarrow{-2} t_1 + 6d = 21 \Rightarrow t_1 = 21 - 6d$$

۱۷۲

مجموع سه جمله اول به صورت $t_1 + t_2 + t_3$ و مجموع سه جمله بعدی آن به صورت $t_4 + t_5 + t_6$ می‌باشد. حال چون می‌دانیم مجموع سه جمله اول 4 برابر مجموع سه جمله بعدی است، جملات را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2 + t_3) &= 4(t_4 + t_5 + t_6) \\ \Rightarrow (t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d + t_1 + 3d) &= 4(t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d) \\ \Rightarrow 3t_1 + 3d &= 4(t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d) \\ \Rightarrow 3t_1 + 3d &= 0 \xrightarrow{+3} t_1 + 5d = 0 \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم $t_6 = t_1 + 5d$ است، بنابراین جمله ششم برابر صفر است.

۱۷۳

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$t_7 - t_4 = 16 \Rightarrow (t_1 + 6d) - (t_1 + 3d) = 16 \Rightarrow d = 2$$

$$t_8 - t_5 = (t_1 + 7d) - (t_1 + 4d) = 3d = 3 \times 2 = 6$$

۱۶۱

چون جملات داده شده، جملات متوالی یک دنباله حسابی صعودی هستند، پس $3x$ واسطه حسابی بین $x+2$ و $2x-1$ است،

$$2(3x) = (2x-1) + (x+2) \Rightarrow 6x = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

پس $t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = 1, t_3 = -\frac{1}{4}$ بوده و قدرنسبت دنباله برابر $\frac{4}{3}$ است. پس جمله بیست و دوم برابر است با:

$$t_{22} = t_1 + 21d = 1 + 21\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + 28 = 29$$

۱۶۲

با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$2, a, b, c, d, e, 44 \Rightarrow 2 + 44 = a + e = b + d = 46$$

چون $46 = 44 + 2$ ، پس $c = 22$ است. حال عبارت خواسته شده را به صورت زیر می‌نویسیم و داریم:

$$(a+c) - (b+d) + c = 46 - 46 + 22 = 22$$

۱۶۳

با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$A = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1 + t_2} = \frac{2t_1 + 2t_2 + t_3}{2t_1} = \frac{5t_1}{2t_1} = \frac{5}{2}$$

۱۶۴

با توجه به صورت سؤال داریم: $t_7 = 3t_1 \Rightarrow t_1 + d = 3t_1 \Rightarrow d = 2t_1$
از طرفی در صورت کسر رابطه $2 \times 11 = 2 \times 11 = \dots = 2 \times 11 = 22$ و در مخرج کسر رابطه $2 \times 12 = 2 \times 12 = 24$ بین شماره جملات برقرار است، پس با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{12}}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{12t_1 + t_{12}}{3t_1} = \frac{5t_1}{t_1} = 5 \Rightarrow \frac{t_1 + 11d}{t_1 + 2t_1} = 5$$

$$\frac{d=2t_1}{d=2t_1} \Rightarrow 5 \times \frac{t_1 + 22t_1}{t_1 + 3t_1} = 5 \times \frac{23t_1}{4t_1} = 5 \times \frac{23 \times 7}{4 \times 11} = \frac{25}{11}$$

۱۶۵

مجموع دو جمله اول برابر ۷ و مجموع دو جمله آخر برابر ۱۷ است، پس:

$$(t_1 + t_2) + (t_7 + t_8) = 7 \Rightarrow (t_1 + t_2) + (t_1 + t_2) = 7$$

$$2t_1 + 2t_2 = 7 \Rightarrow t_1 = \frac{7}{2}$$

حال مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم برابر است با:

$$t_7 + t_8 + t_9 = t_1 + t_2 + t_3 = 3t_1 = 3 \times \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$$

۱۶۶

با استفاده از قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 63 \Rightarrow 7t_4 = 63 \Rightarrow t_4 = 9$$

بنابراین چون مجموع اندیس‌های t_1 و t_4 برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_1 + t_4 = 2t_2 = 2 \times 9 = 18$$

۱۶۷

سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۱۵ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

پس سه جمله موردنظر به صورت $5-d, 5, 5+d$ هستند. حال مجموع مربعات این سه جمله را برابر ۹۳ قرار می‌دهیم و داریم:

$$(5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 93 \Rightarrow 25 + 2d^2 = 93 \Rightarrow d^2 = 34 \Rightarrow d = \pm \sqrt{34}$$

چون نمی‌دانیم دنباله موردنظر صعودی است یا نزولی، پس هر دو جواب ۳ و ۲- برای قدرنسبت قابل قبول هستند.

۱۶۸

سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع این سه جمله برابر ۲۱ است، پس:

$$(a-d) + a + (a+d) = 21 \Rightarrow 3a = 21 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین سه جمله موردنظر به صورت $7-d, 7, 7+d$ هستند. حال حاصل ضرب این سه جمله را می‌نویسیم و داریم:

$$(7-d)(7+d)(7) = 215 \Rightarrow 49-d^2 = \frac{215}{7} \Rightarrow d^2 = \frac{1}{7} \Rightarrow d = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$$

چون دنباله صعودی است، پس فقط $d = \frac{1}{\sqrt{7}}$ قابل قبول است.

۱۶۹

با توجه به این‌که جمله اول دنباله برابر ۱۸ و جمله پنجم آن ۶۲ است، قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$18, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 62 \Rightarrow t_5 = t_1 + 4d = 18 + 4d = 62 \Rightarrow d = 11$$

بنابراین جمله سیزدهم برابر است با: $t_{13} = t_1 + 12d = 18 + 12(11) = 150$

۱۷۰

وقتی بین دو عدد ۱۵ و ۲۷ سه واسطه حسابی قرار دهیم، جمله اول برابر ۱۵ و جمله پنجم برابر ۲۷ است:

$$15, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 27 \Rightarrow t_5 = 15 + 4d = 27 \Rightarrow 4d = 12 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین جملات دنباله به صورت ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۴، ۲۷ است. حال با قرار دادن پنج واسطه حسابی بین اعداد ۱۵ و ۲۷ داریم:

$$15, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 27 \Rightarrow t_7 = 15 + 6d = 27 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین جملات دنباله در این حالت به صورت ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷ است. در نتیجه مجموع دو واسطه بزرگ برابر $24 + 25 = 49$ است.

۱۷۱

چون زاویه‌های مثلث تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، آن‌ها را به صورت $x-d, x, x+d$ در نظر می‌گیریم. [حتماً امروزه گوشتان خورده است که

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، بنابراین داریم:

$$(x-d) + x + (x+d) = 180 \Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60$$

پس حتماً یکی از زاویه‌های این مثلث 60° است.



پاسخ نامه تشریحی فصل اول

۱۷۶

اگر جملات دنباله حسابی را با a_n و قدرنسبت آن را با d نمایش دهیم و هم چنین جملات الگوی خطی را با b_n و قدرنسبت آن را با d' نمایش دهیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_p = b_p &\Rightarrow a_1 + 2d = b_1 + d' \\ a_8 = b_8 &\Rightarrow a_1 + 7d = b_1 + 6d' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4d = 5d' \Rightarrow d = \frac{5}{4}d'$$

هم چنین با توجه به این که $b_1 = 0$ است، داریم:

حال نسبت جمله پانزدهم الگو به قدرنسبت دنباله حسابی را به دست می آوریم:

$$\frac{b_{15}}{d} = \frac{b_1 + 14d'}{\frac{5}{4}d'} = \frac{14d'}{\frac{5}{4}d'} = \frac{56}{5}$$

۱۷۷

تعداد صدلی ها در ردیف ها، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۱۵ و قدرنسبت ۴ می دهند. بنابراین تعداد صدلی ها برابر $15 + (n-1) \times 4$ است و تعداد صدلی ها در ردیف بیستم برابر است با:

$$t_{20} = 15 + (20-1) \times 4 = 91$$

۱۷۸

نسبت جمله چهارم به قدرنسبت دنباله به صورت $\frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3$ است. پس باید مقدار $\frac{a}{d}$ را به دست آوریم:

$$6a^2 = 5a_p a + 2a_8 a \Rightarrow 6(a+d)^2 = 5(a+2d)a + 2(a+d)a$$

$$6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 2a^2 + 2ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0 \xrightarrow{+d^2} 2\frac{a^2}{d^2} + \frac{a}{d} - 6 = 0 \xrightarrow{\frac{a}{d}=t} 2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (2t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow t = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{d} = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{d} + 3 = 1, \frac{9}{2}$$

۱۷۹

با توجه به رابطه $a_n = a_{n-1} + 4$ داریم:

$$a_n - a_{n-1} = 4 \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$$

از طرفی با توجه به رابطه داده شده در صورت سؤال داریم:

$$a_8^2 + 2a_8^2 a_4 + 2a_8 a_4^2 + a_4^3 = 27 \Rightarrow (a_8 + a_4)^3 = 27 \Rightarrow a_8 + a_4 = 3$$

$$\Rightarrow a_1 + 7d + a_1 + 3d = 3 \xrightarrow{d=2} 2a_1 + 14 = 3 \Rightarrow a_1 = -\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + 6d = -\frac{11}{2} + 6 \times 2 = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۸۰

ابتدا رابطه داده شده را ساده می کنیم:

$$\sqrt{2a_1^2 - 4a_1 + 1} - a_1 = -1 \Rightarrow \sqrt{(2a_1 - 1)^2} = a_1 - 1 \Rightarrow |2a_1 - 1| = a_1 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 - 1 = a_1 - 1 \Rightarrow 2a_1 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 - d = 0 \Rightarrow a_1 = d \\ 2a_1 - 1 = 1 - a_1 \Rightarrow 2a_1 + a_1 = 2 \Rightarrow 3a_1 = 2 \end{cases}$$

از طرفی $a_1 = -18$ می باشد، بنابراین در هر حالت قدرنسبت را می یابیم:

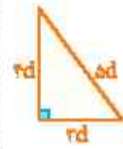
$$1 \begin{cases} a_1 = d \\ a_1 + 5d = -18 \xrightarrow{a_1=d} 6d = -18 \Rightarrow d = -3 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2a_1 + d = 2 \\ a_1 + 5d = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 2 \\ -2a_1 - 15d = +54 \end{cases} \xrightarrow{+} -14d = 56 \Rightarrow d = -\frac{56}{14} = -4$$

پس مجموع قدرنسبت ها برابر $-7 = (-3) + (-4)$ می باشد.

۱۷۲

چون اضلاع مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی داده اند، آن ها را به صورت $3d, 4d, 5d$ در نظر می گیریم و داریم:



$$\text{محیط مثلث} = 3d + 4d + 5d = 12d$$

پس نسبت محیط این مثلث به وتر آن برابر است با:

$$\frac{\text{محیط}}{\text{طول وتر}} = \frac{12d}{5d} = \frac{12}{5} = 2.4$$

۱۷۳

از آن جایی که قدرنسبت دو دنباله داده شده برابر ۵ و ۳ است، پس قدرنسبت دنباله جمله های مشترک برابر $[3, 5] = 15$ است. حال چند جمله اول هر یک از دنباله ها را می نویسیم تا اولین جمله مشترک مشخص شود:

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

$$\Rightarrow \text{اولین جمله مشترک} = 17$$

$$8, 11, 14, 17, \dots$$

پس جمله عمومی دنباله مورد نظر برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 17 + (n-1) \times 15 = 15n + 2$$

بنابراین برای به دست آوردن تعداد اعداد سه رقمی داریم:

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow 6.1 \leq n \leq 66.1 \dots$$

$$\Rightarrow n = 7, 8, \dots, 66 \Rightarrow \text{تعداد جملات مشترک سه رقمی} = 66 - 7 + 1 = 60$$

تذکر

جمله های مشترک دو دنباله حسابی، خود تشکیل یک دنباله حسابی می دهند که جمله اول آن برابر اولین جمله مشترک دو دنباله اولیه و قدرنسبت آن برابر ک.م.م قدرنسبت های دو دنباله اولیه است.

۱۷۴

قدرنسبت و جمله اول هر یک از دنباله ها را مشخص می کنیم و داریم:

$$-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots \Rightarrow d_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} d = [3, 5] = 15 \\ \text{اولین جمله مشترک} = 16 \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله جمله های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 16 + (n-1) \times 15 = 15n + 1$$

حال برای پیدا کردن کوچک ترین جمله سه رقمی این دنباله داریم:

$$t_n \geq 100 \Rightarrow 15n + 1 \geq 100 \Rightarrow 15n \geq 99 \Rightarrow n \geq 6.1 \dots \Rightarrow \text{Min}(n) = 7$$

بنابراین کوچک ترین جمله سه رقمی جمله هفتم دنباله است:

$$t_7 = 15 \times 7 + 1 = 106$$

۱۷۵

قدرنسبت و جمله اول هر یک از دنباله ها را مشخص می کنیم و داریم:

$$-1, 1, 3, 5, 7, \dots \Rightarrow d_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} d = [2, 5] = 10 \\ \text{اولین جمله مشترک} = 7 \end{cases}$$

بنابراین جمله عمومی دنباله جمله های مشترک به صورت زیر است:

$$t_n = 7 + (n-1) \times 10$$

در نتیجه دهمین جمله مشترک برابر است با:

$$t_{10} = 7 + (10-1) \times 10 = 7 + 9 \times 10 = 97$$